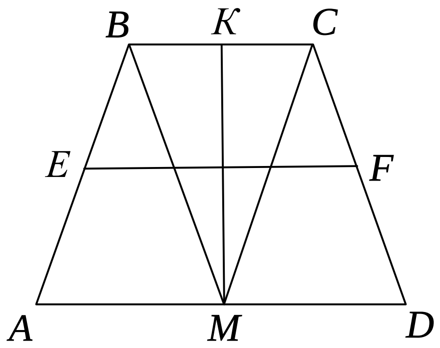
Билет № 22, вопрос 3
Задача по теме «Четырехугольники»

59. Докажите, что в равнобедренной трапеции прямые, соединяющие середины противолежащих сторон, перпендикулярны.



Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $BC \parallel AD$, $AB = CD$, E, K, F, M – соответственно середины AB, BC, CD, AD.
Доказать: $MK \perp EF$.

Доказательство

Т.к. E и F – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, то EF – средняя линия трапеции по определению. По свойству средней линии $EF \parallel AD \parallel BC$.

Проведем отрезки BM и CM.

Рассмотрим получившиеся треугольники ABM и DCM.

$AB = CD$ по условию задачи. $\angle A = \angle D$ как углы при основании равнобедренной трапеции. $AM = MD$, т.к. M – середина AD. Следовательно, $D\ ABM = D\ DCM$ по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $BM = CM$.

Рассмотрим $D\ BMC$.

$BM = CM$ по доказанному, поэтому $D\ BMC$ – равнобедренный по определению. Т.к. по условию K – середина BC, то отрезок MK – медиана $D\ BMC$, а значит и высота, поэтому $MK \perp BC$.

Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, будет перпендикулярна и второй прямой, поэтому т.к. $MK \perp BC$, а $BC \parallel EF$, то $MK \perp EF$.

Итак, в равнобедренной трапеции прямые, соединяющие середины противолежащих сторон, перпендикулярны.

Ч.т.д.