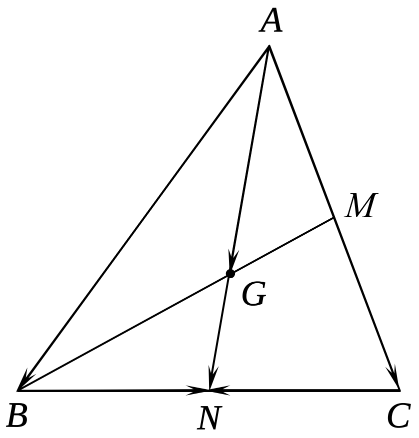
Билет № 21, вопрос 3

Задача по теме «Координаты вектора»

152. Дан треугольник ABC и точка G – точка пересечения его медиан. Докажите, что $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.



Дано: D ABC,
AN, BM – медианы,
$AN \cap BM = G$.

Доказать: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

Доказательство

По правилу треугольника сложения двух векторов

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \text{ и } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AC}.$$

Т.к. AN – медиана D ABC, то точка N – середина стороны BC. Значит, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CN}$ – противоположные векторы, поэтому их сумма равна нулю. Отсюда

$$2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AN} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Т.к. медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GN}} = \dfrac{2}{1}$, поэтому $\overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}$. Значит, $\overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, отсюда

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Ч.т.д.