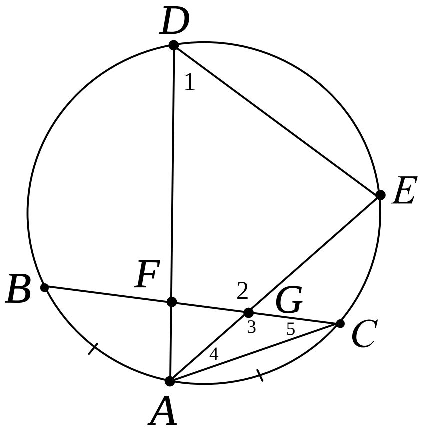
Билет № 20, вопрос 3

Задача по теме «Многоугольники. Вписанные и описанные четырехугольники»

97. Через точку A – середину дуги BC, проведены две хорды AD и AE, пересекающие хорду BC в точках соответственно F и G. Докажите, что четырехугольник $DFGE$ можно вписать в окружность.



Дано: $\cup BC$, A – середина $\cup BC$,
AD, AE – хорды,
$AD \cap BC = F$,
$AE \cap BC = D$.

Доказать: что четырехугольник $DFGE$ можно вписать в окружность.

Доказательство

Проведем хорду AC и введем следующие обозначения: $\angle ADE = \angle FDE = \angle 1$, $\angle BGE = \angle FGE = \angle 2$, $\angle AGC = \angle 3$, $\angle EAC = \angle GAC = \angle 4$, $\angle BCA = \angle GCA = \angle 5$.

Известно, что четырехугольник можно вписать в окружность только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180°, поэтому докажем, например, что в четырехугольнике $DFGE$ $\angle D + \angle G = 180°$.

По теореме о сумме углов треугольника в $D\ AGC$ $\angle 3 = 180° - (\angle 4 + \angle 5)$.

По теореме о вписанном угле $\angle 4 = \frac{1}{2}\cup EC$, $\angle 5 = \frac{1}{2}\cup AB$, $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AE$.

Значит, $\angle 3 = 180° - (\frac{1}{2}\cup EC + \frac{1}{2}\cup AB)$.

Т.к. точка A – середина $\cup BC$, то $\cup AB = \cup AC$, поэтому

$$\angle 3 = 180° - (\tfrac{1}{2}\cup EC + \tfrac{1}{2}\cup AC),\ \angle 3 = 180° - \tfrac{1}{2}\cup AE.$$

Т.к. $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные, то $\angle 2 = 180° - \frac{1}{2}\cup AE$.

Таким образом, $\angle D + \angle G = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\cup AE + 180° - \frac{1}{2}\cup AE = 180°$.

Итак, в четырехугольнике $DFGE$ сумма противолежащих углов равна 180°, поэтому его можно вписать в окружность.

Ч.т.д.