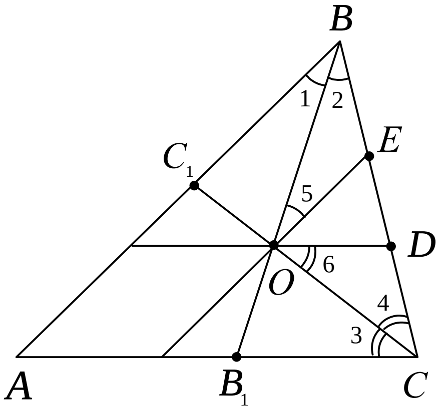
Билет № 19, вопрос 3

Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность»

37. В треугольнике *ABC* биссектрисы внутренних углов *B* и *C* пересекаются в точке *O*. Через эту точку проведена прямая *OD* параллельно *AC* до пересечения с *BC* в точке *D* и прямая *OE* параллельно *AB* до пересечения с *BC* в точке *E*. Докажите, что периметр треугольника *OED* равен длине стороны *BC*.



Дано: D *ABC*,
BB_1, CC_1 – биссектрисы углов *B* и *C*,
$BB_1 \cap CC_1 = O$,
$OD \parallel AC$, $OE \parallel AB$,
$D, E \in BC$.

Доказать: $P_{D\,OED} = BC$.

Доказательство

Т.к. в D *ABC* BB_1 – биссектриса $\angle B$, то $\angle 1 = \angle 2$. Т.к. $OE \parallel AB$, то $\angle 1 = \angle 5$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых *OE* и *AB* секущей BB_1. Отсюда $\angle 2 = \angle 5$, а D *BEO* – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $BE = OE$.

Т.к. в D *ABC* CC_1 – биссектриса $\angle C$, то $\angle 3 = \angle 4$. Т.к. $OD \parallel AC$, то $\angle 3 = \angle 6$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых *OD* и *AC* секущей CC_1. Отсюда $\angle 4 = \angle 6$, а D *CDO* – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $CD = OD$.

Т.к. периметр треугольника равен сумме длин его сторон, то

$$P_{D\,OED} = OE + ED + OD.$$

Т.к. $BE = OE$ и $CD = OD$, то $P_{D\,OED} = BE + ED + DC = BC$.

Итак, $P_{D\,OED} = BC$.

Ч.т.д.