

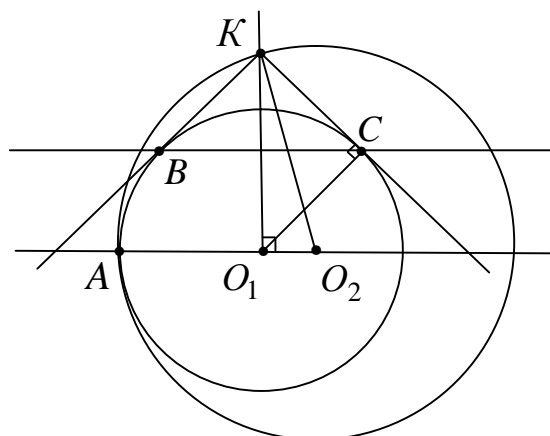
Билет № 17, вопрос 3

Задача по теме «Окружность и круг»

80. Две окружности, радиусы которых равны 2 см и 3 см, внутренне касаются. Из центра меньшей окружности проведен луч, перпендикулярный линии центров, который пересекает большую окружность, и из точки пересечения проведены две касательные к меньшей окружности. Найдите угол между касательными.

Дано: $\omega(O_1; r_1)$, $\omega(O_2; r_2)$, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 3$ см,
 $\omega(O_1; r_1) \cap \omega(O_2; r_2) = A$,
 A – внутренняя точка касания окружностей,
 луч $O_1K \perp O_1O_2$, $O_1K \cap \omega(O_2; r_2) = K$,
 KB и KC – касательные к $\omega(O_1; r_1)$,
 B и C – точки касания.

Найти: $\angle BKC$.



Решение

Рассмотрим $\triangle O_1O_2K$.

Т.к. луч $O_1K \perp O_1O_2$, то $\triangle O_1O_2K$ – прямоугольный с гипотенузой KO_2 .

Т.к. $O_1A = r_1 = 2$ см и $O_2A = r_2 = 3$ см, то $O_1O_2 = O_2A - O_1A$, $O_1O_2 = 3 - 2 = 1$ (см).

Тогда по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $\triangle O_1O_2K$ с гипотенузой KO_2 имеем: $KO_2^2 = KO_1^2 + O_1O_2^2$,

$$KO_1^2 = KO_2^2 - O_1O_2^2,$$

$$KO_1^2 = 3^2 - 1^2,$$

$$KO_1^2 = 9 - 1,$$

$$KO_1^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} KO_1 = \sqrt{8}, \\ KO_1 = -\sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} KO_1 = 2\sqrt{2}, \\ KO_1 = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $KO_1 = 2\sqrt{2}$ см.

Рассмотрим $\triangle O_1CK$.

Т.к. касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, то $O_1C \perp KC$, поэтому $\triangle O_1CK$ – прямоугольный с гипотенузой KO_1 .

Т.к. синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, то

$$\sin \angle O_1KC = \frac{O_1C}{O_1K}, \quad \sin \angle O_1KC = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Отсюда } \angle O_1CK = 45^\circ.$$

Т.к. отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности, то

$$\begin{aligned} \angle BKC &= \angle O_1KC + \angle O_1KB = 2\angle O_1KC, \\ \angle BKC &= 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: $\angle BKC = 90^\circ$.