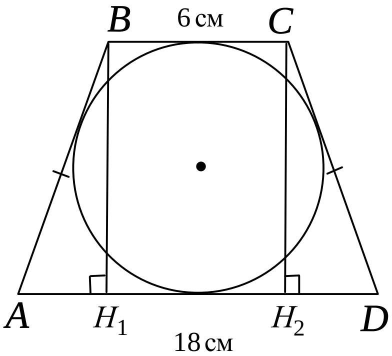
Билет № 16, вопрос 3

Задача по теме «Многоугольники. Вписанные и описанные четырехугольники»

95. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 см и 6 см, вписан круг. Найдите его радиус и углы трапеции.



Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция,
$BC \parallel AD$, $AB = CD$,
$AD = 18$ см, $BC = 6$ см,
в трапецию вписан круг.

Найти: радиус круга и углы трапеции.

Решение

Т.к. в любом описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в равнобедренной трапеции $ABCD$ $AB + CD = BC + AD$, отсюда

$$AB = CD = (18 + 6) : 2 = 12 \text{ (см)}.$$

Проведем высоты трапеции BH_1 и BH_2.

Рассмотрим получившиеся прямоугольные треугольники ABH_1 и DCH_2. $AB = CD$ по условию задачи, $BH_1 = BH_2$ как расстояния между параллельными прямыми BC и AD. Следовательно, D ABH_1 = D DCH_2 по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AH_1 = DH_2$.

Рассмотрим четырехугольник BCH_2H_1.

$BC \parallel AD$, поэтому $BC \parallel H_1H_2$. $BH_1 \parallel BH_2$ как перпендикуляры, проведенные к одной стороне. Следовательно, четырехугольник BCH_2H_1 – параллелограмм по определению. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $BC = H_1H_2 = 6$ см. Значит, $AH_1 = DH_2 = (AD - H_1H_2) : 2$, $AH_1 = (18 - 6) : 2 = 6$ (см).

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABH_1 с гипотенузой AB имеем: $AB^2 = AH_1^2 + BH_1^2$, отсюда $BH_1^2 = AB^2 - AH_1^2$, $BH_1^2 = 12^2 - 6^2$,

$$BH_1^2 = 144 - 36,\ BH_1^2 = 108 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BH_1 = \sqrt{108}, \\ BH_1 = -\sqrt{108} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BH_1 = 6\sqrt{3}, \\ BH_1 = -6\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $BH_1 = 6\sqrt{3}$ см.

Т.к. $BH_1 = 2r$, где r – радиус вписанного в трапецию круга, то $r = \frac{1}{2}BH_1$,

$$r = \tfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Т.к. в прямоугольном треугольнике ABH_1 $\sin \angle A = \dfrac{BH_1}{AB}$, то

$$\sin \angle A = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \angle A = 60°.$$

Т.к. в трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, то $\angle A + \angle B = 180°$ как внутренние односторонние углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AB. Значит, $\angle B = 180° - \angle A$, $\angle B = 180° - 60° = 120°$.

Т.к. равнобедренной трапеции углы при основаниях равны, то

$$\angle D = \angle A = 60°,\ \angle C = \angle B = 120°.$$

Ответ: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$, $r = 3\sqrt{3}$ см.