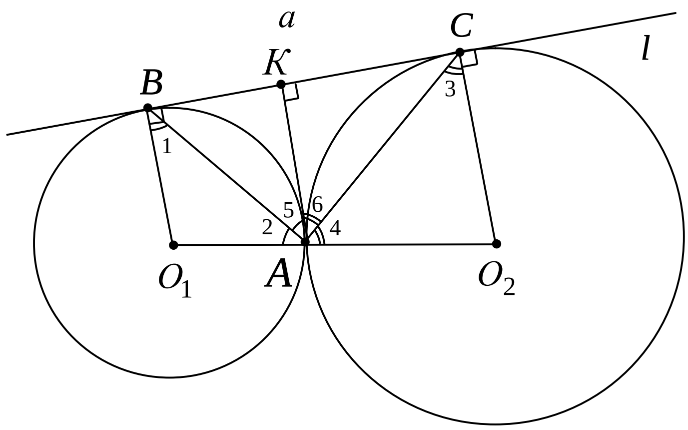
Билет № 14, вопрос 3
Задача по теме «Окружность и круг»

74. Две окружности внешне касаются в точке A, B и C – точки касания их внешней касательной, отрезок $BC = a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и C.

Дано: $\omega(O_1; r_1)$, $\omega(O_2; r_2)$, A – внешняя точка касания окружностей, B и C – точки касания их внешней касательной l, $BC = a$.

Найти: радиус окружности, проходящей через точки A, B и C.



Решение

Т.к. касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то $O_1B \perp l$, $O_2C \perp l$.

Из точки A – внешней точки касания окружностей, проведем перпендикуляр AK к прямой l.

Т.к. перпендикуляры, проведенные к одной прямой параллельны, то $O_1B \parallel AK \parallel O_2C$.

Т.к. $O_1A = O_1B = r_1$ как радиусы одной окружности, то $D\ O_1AB$ – равнобедренный по определению, а $\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

Т.к. $\angle 1 = \angle 5$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых O_1B и AK секущей AB и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 2 = \angle 5$.

Т.к. $O_2A = O_2C = r_2$ как радиусы одной окружности, то $D\ O_2AC$ – равнобедренный по определению, а $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

Т.к. $\angle 3 = \angle 6$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых O_2B и AK секущей AC и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 4 = \angle 6$.

Т.к. $\angle O_1AO_2$ – развернутый, то $\angle 2 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 4 = 180°$.

Т.к. $\angle 2 = \angle 5$, а $\angle 4 = \angle 6$, то $2(\angle 5 + \angle 6) = 180°$, отсюда

$$\angle BAC = \angle 5 + \angle 6 = 180° : 2 = 90°.$$

Т.к. окружность проходит через точки A, B и C, то $\angle\ BAC$ – вписанный и равен $90°$, поэтому он опирается на диаметр BC, равный a. Значит, радиус окружности, проходящей через точки A, B и C, равен $\frac{a}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}$.