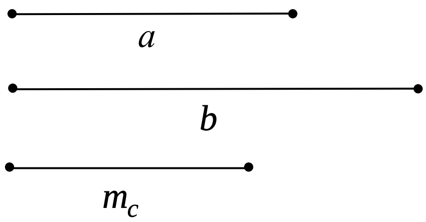
Билет № 6, вопрос 3

Задача по теме «Треугольники»

10. Постройте треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Дано:



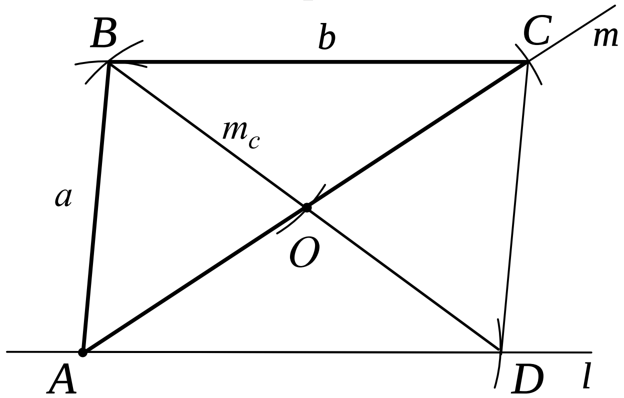
Построить: D ABC так, что $AB = a$, $BC = b$, $BO = m_c$.

Решение

Анализ. Допустим, что искомый D ABC построен и в нем $AB = a$, $BC = b$, $BO = m_c$.

Достроим D ABC до параллелограмма $ABCD$ и проведем диагональ BD. По свойствам параллелограмма $BD = 2BO = 2m_c$, $BC = AD = b$, поэтому построение параллелограмма можно провести по следующему плану: сначала построить D ABD по трем сторонам $AB = a$, $AD = b$, $BD = 2m_c$. Затем на продолжении отрезка AO за точку O – середину отрезка BD, отложить отрезок $OC = AO$. D ABC будет искомым.

Построение



1) прямая l, точка $A \in l$;

2) D ABD, $AB = a$, $AD = b$, $DB = 2m_c$:

а) $\omega(A; b)$, $\omega(A; b) \cap l = D$;

б) $\omega(A; a)$;

в) $\omega(D; 2m_c)$, $\omega(D; 2m_c) \cap \omega(A; a) = B$;

г) отрезки AB и BD;

3) O – середина BD: $\omega(B; m_c) \cap BD = O$;

4) $OC \subset AO$, $OC = AO$:

$\omega(O; OA)$, $\omega(O; OA) \cap AO = A, C$;

5) отрезок BC;

D ABC – искомый.

Доказательство

Проведем отрезок CD.

Рассмотрим получившийся четырехугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD = m_c$ по построению. Значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $BC = AD = b$.

Итак, в $D\,ABC$ $AB = a$, $BO = m_c$ по построению, $BC = b$ по доказанному, следовательно, $D\,ABC$ – искомый.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если каждый из отрезков a, b, $2m_c$ меньше суммы двух других.