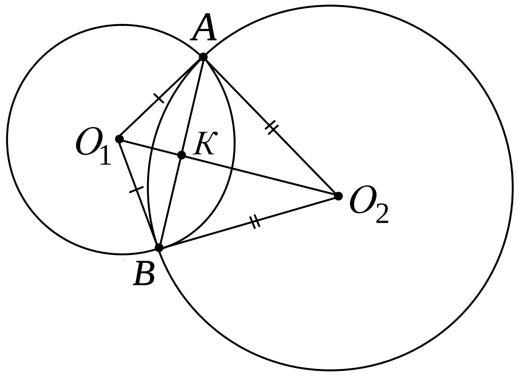
Билет № 3, вопрос 3

Задача по теме «Геометрические преобразования»

109. Докажите, что точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, соединяющей их центры.



Дано: $\omega_1(O_1; r_1)$, $\omega_2(O_2; r_2)$,
$\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$.

Доказать: $A_1 = S_{O_1O_2}(A)$.

Доказательство

Рассмотрим $D\ O_1AO_2$ и $D\ O_1BO_2$.

$O_1A = O_1B = r_1$; $O_2A = O_2B = r_2$; O_1O_2 – общая.

Следовательно, $D\ O_1AO_2 = D\ O_1BO_2$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$.

Рассмотрим $D\ AO_1B$.

Т.к. $O_1A = O_1B = r_1$, то $D\ AO_1B$ – равнобедренный.

Т.к. $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$ по доказанному выше, то O_1K – биссектриса $D\ AO_1B$, проведенная к основанию AB, поэтому O_1K является медианой и высотой, т.е. $BK = KA$, $O_1K \perp AB$.

Итак, O_1, K, O_2 лежат на одной прямой, O_1O_2 проходит через точку K – середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Следовательно, по определению осевой симметрии $A_1 = S_{O_1O_2}(A)$.

Ч.т.д.