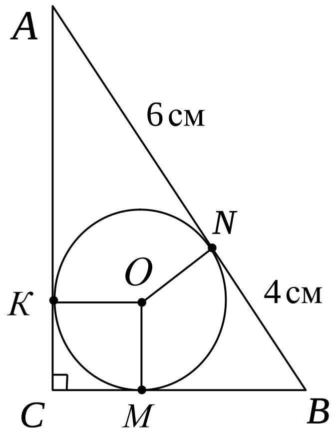
Билет № 2, вопрос 3

Задача по теме «Площади плоских фигур»

132. Точка касания круга, вписанного в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные 4 см и 6 см. Найдите площадь этого круга.



Дано: $\omega(0; r)$ вписана в прямоугольный $D\,ABC$, $\angle C = 90°$, M, N, K – точки касания, $AN = 6$ см, $NB = 4$ см.

Найти: $S_{\text{круга}}$.

Решение

Т.к. отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности равны, то $AN = AK = 6$ см, $BN = BM = 4$ см, $CK = KM$.

Т.к. касательные к окружности перпендикулярны радиусам, проведенным в точку касания, то $OK \perp AC$, $OM \perp BC$, где $OK = OM = r$.

Т.к. перпендикуляры, проведенные к одной стороне параллельны, то $OK \parallel MC$, $KC \parallel OM$, поэтому четырехугольник $CKOM$ – параллелограмм по определению. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $KC = OM = r$, $OK = MC = r$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB имеем: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, где $AC = (6 + r)$ см, $BC = (4 + r)$ см, $AB = 4 + 6 = 10$ (см). Отсюда

$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2,$$
$$36 + 12r + r^2 + 16 + 8r + r^2 = 100,$$
$$2r^2 + 20r - 48 = 0, \;\big|: 2$$
$$r^2 + 10r - 24 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} r = -12, \\ r = 2. \end{array}\right.$

Т.к. длина радиуса выражается положительным числом, то $r = 2$ см.

Известно, что $S_{\text{круга}} = \pi r^2$, поэтому $S_{\text{круга}} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (см^2).

Ответ: $S_{\text{круга}} = 4\pi$ см^2.