Билет № 24

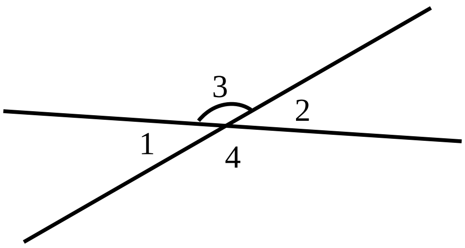
1. Скалярное произведение двух векторов. Определение, свойства.
2. Вертикальные углы. Определение, свойство.

Вопрос № 2
Вертикальные углы. Определение, свойство

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов: *Ð 1* и *Ð 3, Ð 2* и *Ð 4.*

Теорема. Вертикальные углы равны.



Дано: *Ð 1* и *Ð 2* – вертикальные углы.

Доказать: *Ð 1* = *Ð 2.*

Доказательство

Ð 3 является смежным и с *Ð 1*, и с *Ð 2*. Сумма смежных углов равна 180°, поэтому *Ð 1* + *Ð 3* = 180°, *Ð 2* + *Ð 3* = 180°. Отсюда получаем, что *Ð 1* = <u>180° –*Ð 3*</u>, *Ð 2* = <u>180° – *Ð 3*</u>. Правые части равенств равны, значит, равны и левые. Следовательно, *Ð 1* = *Ð 2.*

Итак, вертикальные углы равны.

Ч.т.д.

Вопрос № 2
Скалярное произведение двух векторов. Определение, свойства

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}).$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то есть $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ = 90°, то cos ($\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$) = 0, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 0.

И обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то cos ($\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$) = 0, поэтому $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ = 90°, то есть $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Таким образом, скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, тогда, если:

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ – острый, т.е. $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) > 0$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$;

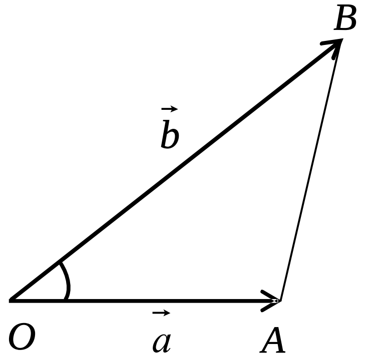
$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ – тупой, т.е. $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) < 0$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$;

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т.е. $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = 1$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$;

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, т.е. $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = -1$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Теорема. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.



Дано: $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

Доказать: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Доказательство

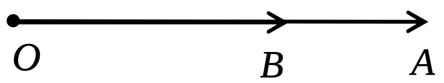
Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые.

Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то по теореме косинусов

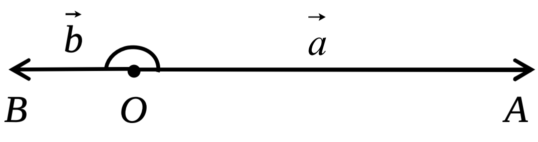
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha. \qquad (1)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.



$$\cos\alpha = 1$$

$$AB^2 = (OA - OB)^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB =$$
$$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha.$$



$$\cos\alpha = -1$$

$$AB^2 = (OA + OB)^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB =$$
$$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha.$$

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (1) можно записать так:

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\vec{b},$$

$$2\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2,$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2\right). \qquad (2)$$

Так как $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$, $\vec{b} - \vec{a}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, то

$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2$, $\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Подставив эти выражения в правую часть равенства (2), получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\,(x_1^2 + y_1^2 + x_1^2 + y_2^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\,x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 - x_1^2 - y_2^2 + 2y_1 y_2 - y_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Итак, скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Ч.т.д.

Следствие 1. Ненулевые векторы $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Следствие 2. Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (сочетательный закон).

Доказательство

Первое свойство непосредственно следует из формулы $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$, а второе свойство – из определения скалярного произведения.

Докажем третье свойство. Введем прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ так: $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, $\vec{c}\{x_3;\ y_3\}$. Используя формулу $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$. получаем

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = (x_1 + x_2)\, x_3 + (y_1 + y_2)\, y_3 =$$

$$(x_1x_3 + y_1 y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Замечание. Распределительный закон справедлив для любого числа слагаемых.

Докажем четвертое свойство. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\ ky_1\}$, поэтому $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = k(x_1 x_2 + y_1 y_2) = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

Ч.т.д.