Билет № 23

1. Вывод уравнения окружности.
2. Равнобедренный треугольник. Определение, свойства.

Вопрос № 1
Вывод уравнения окружности

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном (одинаковом) расстоянии от данной точки.

Данная точка называется ***центром*** окружности, а отрезок, соединяющий центром с какой-либо точкой окружности, – ***радиусом*** окружности.

Уравнением фигуры в прямоугольной системе координат на плоскости называется уравнение с двумя переменными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой фигуре.

Выведем уравнение окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат. Пусть точка C имеет координаты $(x_o; y_o)$ (рис. 1).

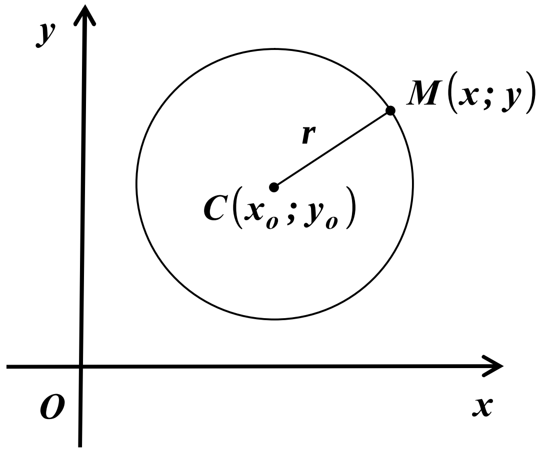


Рис. 1

Расстояние от произвольной точки M $(x; y)$ до точки C $(x_o; y_o)$ вычисляется по формуле $MC = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$.

Если точка M лежит на окружности, то $MC = r$, или $MC^2 = r^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Если точка M $(x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$, и координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке C $(x_o; y_o)$ имеет вид

$$\boldsymbol{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2.}$$

Если центром окружности радиуса r является начало координат, то уравнение примет вид

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2.}$$

Если центр окружности радиуса r лежит на оси абсцисс, то уравнение примет вид

$$(x - x_o)^2 + y^2 = r^2.$$

Если центр окружности радиуса r лежит на оси ординат, то уравнение примет вид

$$x^2 + (y - y_o)^2 = r^2.$$

Вопрос № 2

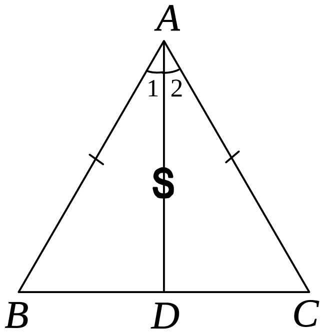
Равнобедренный треугольник. Определение, свойства

Треугольник называется ***равнобедренным,*** если две его стороны равны. Равные стороны называются ***боковыми сторонами,*** а третья сторона – ***основанием*** равнобедренного треугольника.

На рисунке 1 *D ABC* – равнобедренный, *AB = BC*, *AB* и *BC* – боковые стороны, *AC* – основание.

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Рис. 1



Дано: *D ABC* – равнобедренный,
AB = BC.

Доказать: *Ð B = Ð C*.

Доказательство

Проведём биссектрису *AD D ABC*.

Рассмотрим получившиеся треугольники *ABD* и *ACD*: *AB = AC* по условию теоремы; *AD* – общая сторона; *Ð 1 = Ð 2*, так как *AD* – биссектриса *D ABC*. Следовательно, *D ABD = D ACD* по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому *Ð B = Ð C*.

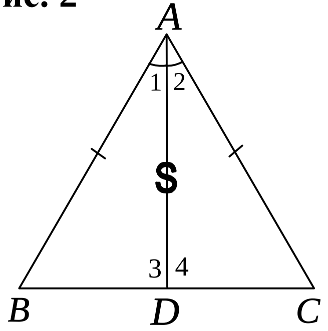
Итак, в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Ч.т.д.

Признак равнобедренного треугольника (*теорема, обратная первому свойству равнобедренного треугольника).* Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Рис. 2



Дано: *D ABC* – равнобедренный,
AB = BC,
AD – биссектриса.

Доказать: *AD* – медиана,
AD – высота.

Доказательство

В ходе предыдущего доказательства было установлено, *D ABD = D ACD*. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов, поэтому *BD = CD* и *Ð 3 = Ð 4*.

Так как $BD = CD$, то точка D – середина стороны BC, и поэтому AD – медиана D ABC.

Так как Ð *3* и Ð *4* – смежные и равны, то они прямые. Следовательно, отрезок AD – высота D ABC.

Итак, в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Ч.т.д.

Так как биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают, поэтому верны следующие утверждения.

Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.