Билет № 22

1. Вывод уравнения прямой,
2. Перпендикулярные прямые. Определение, построение прямой, перпендикулярной данной.

Вопрос № 1
Вывод уравнения прямой

Уравнением линии в прямоугольной системе координат на плоскости называется уравнение с двумя переменными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которому удовлетворяют координаты любой точки линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой линии.

Выведем уравнение прямой l в заданной прямоугольной системе координат.

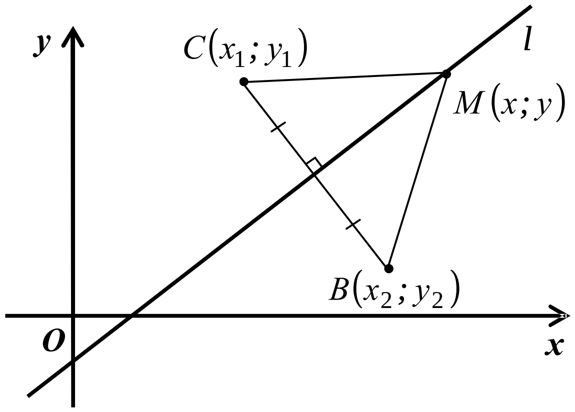


Рис. 1

Отметим две точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 1).

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка, поэтому если точка M $(x; y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \qquad (1)$$

Если точка M $(x; y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, уравнение (1) является уравнением прямой l в записанной системе координат. Преобразуем его, возведем выражения в скобках в квадрат и приведем подобные члены:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2;$$
$$x^2 - 2x\,x_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2x\,x_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2;$$
$$2x\,x_2 - 2x\,x_1 + x_1^2 - x_2^2 + y^2 + 2yy_2 - 2yy_1 + y_1^2 - y_2^2 = 0;$$
$$2(\,x_2 - x_1)\,x + 2(y_2 - y_1)\,y + (x_1^2 + y_1^2 - x_1^2 - y_2^2) = 0.$$

Пусть $a = 2(\,x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$, $c = x_1^2 + y_1^2 - x_1^2 - y_2^2$, тогда уравнение примет вид

$$\boldsymbol{ax^2 + by + c = 0.} \qquad (2)$$

Так как A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ – различные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_2 - x_1)$ и $(y_2 - y_1)$ не равна нулю, то есть хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля.

Таким образом, уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.

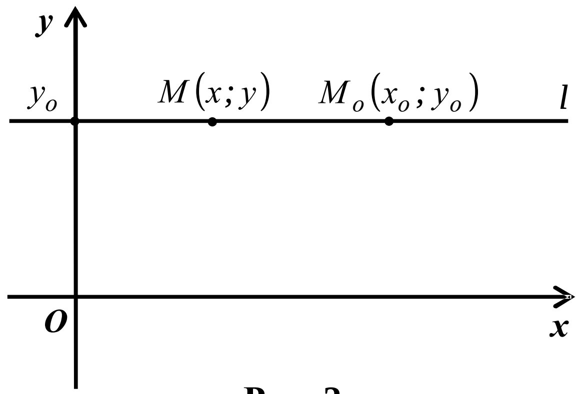


Рис. 2

$\boldsymbol{y = y_o}$ – уравнение прямой l, проходящей через точку M_o $(x_o; y_o)$ и параллельной оси абсцисс (Ox).

Координаты любой точки M $(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $y = y_o$, а координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют.

$\boldsymbol{y = 0}$ – уравнение оси абсцисс (Ox).

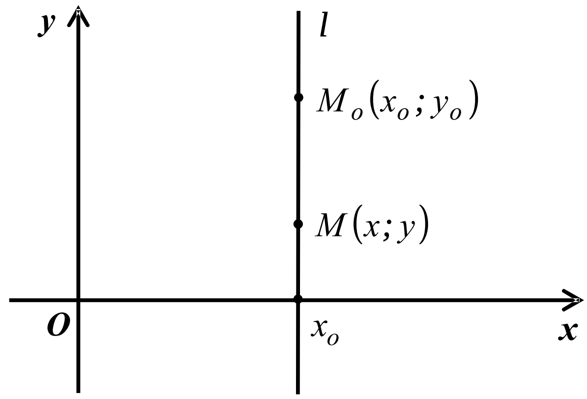


Рис. 3

$\boldsymbol{x = x_o}$ – уравнение прямой l, проходящей через точку M_o $(x_o; y_o)$ и параллельной оси ординат (Oy).

Координаты любой точки M $(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $x = x_o$, а координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют.

$\boldsymbol{x = 0}$ – уравнение оси ординат (Oy).

Вопрос № 2

Перпендикулярные прямые.
Определение, построение прямой, перпендикулярной данной

Две прямые на плоскости называются ***перпендикулярными*** (или взаимно перпендикулярными), если они пересекаются под прямым углом.

Возможны два случая.

1) Точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной лежит на прямой.

2) Точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной не лежит на прямой.

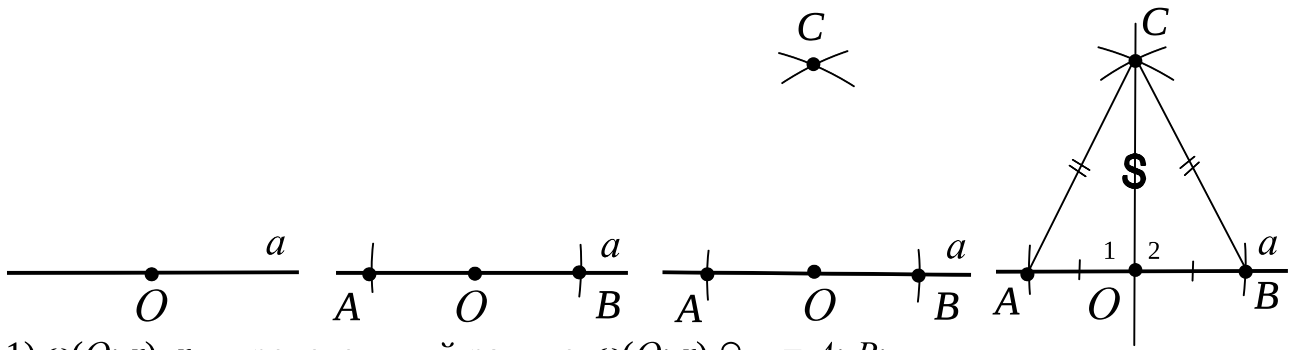
Рассмотрим первый случай, когда точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной лежит на прямой.

Дано: точка $O \in a$.

Построить: прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O.

Построение

Проведем окружность произвольного радиуса r с центром в точке O. Она пересекает прямую a в точках A и B Проведем две окружности с центрами в точках A и B произвольного радиуса $r_1 > \frac{1}{2}AB$. Точку пересечения окружностей обозначим через C. Проведем прямую OC – это и будет искомая прямая.



1) $\omega(O; r)$, r – произвольный радиус, $\omega(O; r) \cap a = A; B$;

2) $\omega(A; r_1)$, $\omega(B; r_1)$, $r_1 > \frac{1}{2}AB$, $\omega(A; r_1) \cap \omega(B; r_1) = C$;

3) OC – искомая прямая.

Доказательство

Проведем отрезки AC и BC.

Рассмотрим получившиеся треугольники AOC и BOC.

$OA = OB$ как радиусы окружности с центром в точке O, $AC = BC$ по построению, OC – общая сторона.

Следовательно, $D\ AOC = D\ BOC$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ смежные и равны, поэтому каждый из них по 90°. Значит, $OC \perp a$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

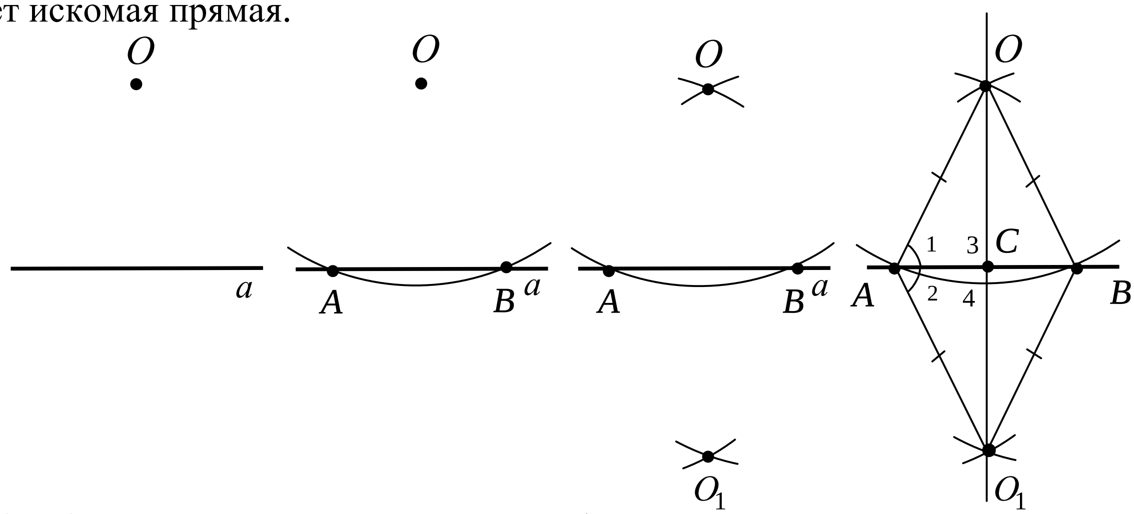
Рассмотрим второй случай, когда точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной не лежит на прямой.

Дано: точка $O \notin a$.

Построить: прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O.

Построение

Проведем окружность с центром в точке O и произвольным радиусом r, но большим, чем расстояние от точки O прямой a. Окружность пересекает прямую a в точках A и B. Проведем две окружности с центрами в точках A и B тем же радиусом r. Они пресекаются в точках O и O_1. Проведем прямую OO_1 – это и будет искомая прямая.



1) $\omega(O; r)$, r – произвольный радиус, но больший, чем расстояние от точки O прямой a, $\omega(O; r) \cap a = A; B$;
2) $\omega(A; r)$, $\omega(B; r)$, $\omega(A; r) \cap \omega(B; r) = O; O_1$;
3) OO_1 – искомая прямая.

Доказательство

Обозначим точку пересечения прямых a и OO_1 через C. Проведем отрезки AO, BO, AO_1 и BO_1.

Рассмотрим $D\ AOB$ и $D\ AO_1B$.

$AO = AO_1$ как радиусы окружности с центром в точке A, $BO = BO_1$ как радиусы окружности с центром B, AB – общая сторона.

Следовательно, $D\ AOB = D\ AO_1B$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим $D\ OAC$ и $D\ O_1AC$.

$AO = AO_1$ как радиусы окружности с центром в точке A, $\angle 1 = \angle 2$ по доказанному выше, AC – общая сторона.

Следовательно, $D\ OAC = D\ O_1AC$ по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 3$ и $\angle 4$ смежные и равны, поэтому каждый из них по 90°. Значит, $O\,O_1 \perp a$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.