Билет № 21

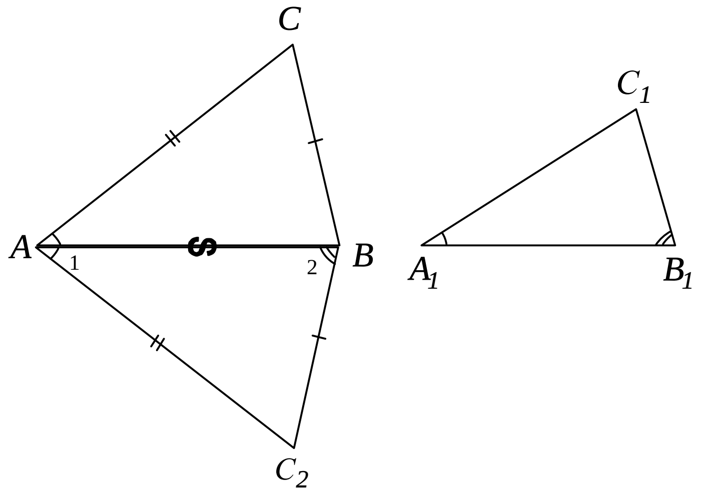
1. Третий признак подобия треугольников.
2. Построение угла, равного данному.

Вопрос № 1
Третий признак подобия треугольников

Теорема. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Дано: D ABC и D $A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Доказать: D ABC ~ D $A_1B_1C_1$.



Доказательство

Чтобы доказать, что треугольники подобны, достаточно доказать, что *Ð A* = *Ð A*$_1$, тогда согласно II признаку подобия D ABC будет подобен D $A_1B_1C_1$.

Рассмотрим D ABC_2, у которого *Ð 1* = *Ð A*$_1$, *Ð 2* = *Ð B*$_1$, тогда D ABC_2 ~ D $A_1B_1C_1$ по I признаку подобия треугольников (по двум углам).

В подобных треугольниках соответствующие стороны пропорциональны, поэтому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$, а по условию теоремы $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, тогда $BC = BC_2$, $AC = AC_2$.

Рассмотрим D ABC и D ABC_2:

а) AB – общая сторона;
б) $BC=BC_2$ по доказанному выше;
в) $AC=AC_2$ по доказанному выше.

Следовательно, D ABC = D ABC_2 по III признаку равенства треугольников (по трём сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\underset{\Delta ABC}{\angle A} = \underset{\Delta ABC_2}{\angle 1}$, а так как *Ð 1* =*Ð A*$_1$, то *Ð A* = *Ð A*$_1$.

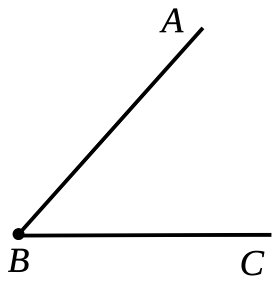
Получили, что в $D\ ABC$ и $D\ A_1B_1C_1$ $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $Ð\ A = Ð\ A_1$, поэтому по II признаку подобия треугольников $D\ ABC \sim D\ A_1B_1C_1$.

Итак, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Ч.т.д.

Вопрос № 2
Построение угла, равного данному

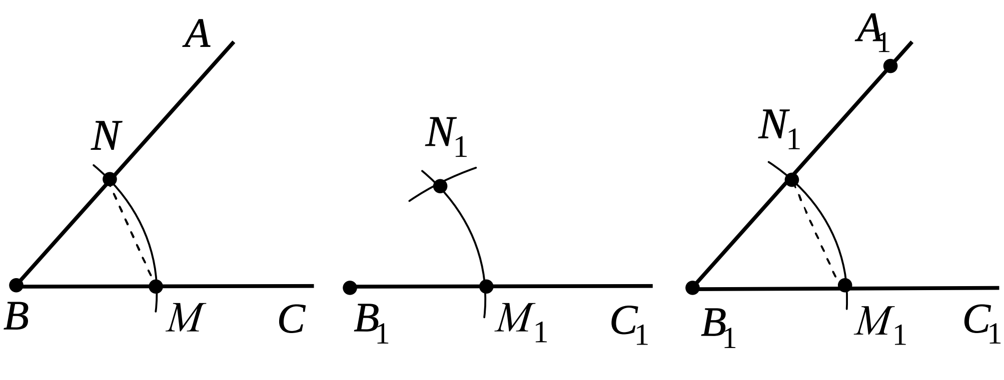
Дано: $\angle ABC$.



Построить: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Построение

Проведем луч B_1C_1. Построим окружность с центром в вершине B и произвольным радиусом r. Она пресекает стороны $\angle ABC$ в точках M и N. Затем проведем окружность с центром в начале луча B_1C_1 и тем же радиусом. Она пересекает луч B_1C_1 в точке M_1. После этого построим окружность с центром в точке M_1, радиус которой равен MN. Окружности с центрами B_1 и M_1 пересекаются в двух точках, одну из которых обозначим N_1. Проведем луч B_1N_1 и возьмем на нем точку A_1. $\angle A_1B_1C_1$ – искомый.



1) луч B_1C_1;
2) $\omega(B; r)$, r – произвольный радиус;
   $\omega(B; r) \cap BC = M$; $\omega(B; r) \cap BA = N$;
3) $\omega(B_1; r)$; $\omega(B_1; r) \cap B_1C_1 = M_1$;
4) $\omega(M_1; MN)$; $\omega(M_1; MN) \cap \omega(B_1; r) = N_1$;
5) луч B_1N_1, точка $A_1 \in B_1N_1$;
   $\angle A_1B_1C_1$ – искомый.

Доказательство

Проведем отрезки MN и M_1N_1.

Рассмотрим получившиеся треугольники BNM и $B_1N_1M_1$.

$BN = BM$ как радиусы окружности с центром B. $B_1N_1 = B_1M_1$ как радиусы окружности с центром B_1. Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $BN = B_1N_1$, $BM = B_1M_1$. Также по построению $MN = M_1N_1$.

Следовательно, $D\ BNM$ и $D\ B_1N_1M_1$. по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle N_1B_1M_1 = \angle NBM$, отсюда $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.