Билет № 20

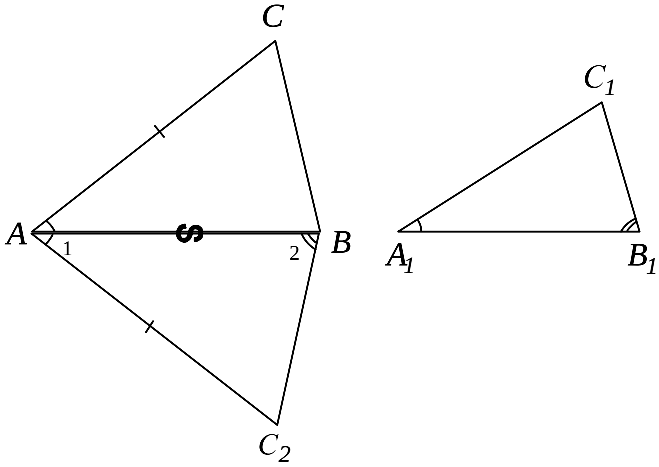
1. Второй признак подобия треугольников.
2. Построение биссектрисы данного угла.

Вопрос № 1
Второй признак подобия треугольников

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: $D\ ABC$ и $D\ A_1B_1C_1$, $Ð\ A = Ð\ A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Доказать: $D\ ABC \sim D\ A_1B_1C_1$.



Доказательство

Чтобы доказать, что треугольники подобны, достаточно доказать, что $Ð\ B = Ð\ B_1$, тогда согласно I признаку подобия $D\ ABC$ будет подобен $D\ A_1B_1C_1$ по двум углам: $Ð\ A = Ð\ A_1$ по условию теоремы , а $Ð\ B = Ð\ B_1$ по доказанному.

Рассмотрим $D\ ABC_2$, у которого $Ð\ 1 = Ð\ A_1$, $Ð\ 2 = Ð\ B_1$, тогда $D\ ABC_2 \sim D\ A_1B_1C_1$ по I признаку подобия треугольников (по двум углам).

В подобных треугольниках соответствующие стороны пропорциональны, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$,а по условию теоремы $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, тогда $AC = AC_2$.

Рассмотрим $D\ ABC$ и $D\ ABC_2$:

а) AB – общая сторона;

б) $AC = AC_2$ по доказанному выше;

в) $\underset{\Delta ABC}{\angle A} = Ð\ 1$, так как $\underset{\Delta ABC}{\angle A} = Ð\ A_1$, $Ð\ A_1 = Ð\ 1$.

Следовательно, $D\ ABC = D\ ABC_2$ по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\underset{\Delta ABC}{\angle B} = \underset{\Delta ABC_2}{\angle 2}$, а так как Ð 2 = Ð B_1, то $\underset{\Delta ABC}{\angle B} = \angle B_1$.

Получили, что в D ABC и D $A_1B_1C_1$ Ð A = Ð A_1 и Ð B = Ð B_1, поэтому по I признаку подобия треугольников D ABC ~ D $A_1B_1C_1$.

Итак, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Ч.т.д.

Вопрос № 2
Построение биссектрисы данного угла

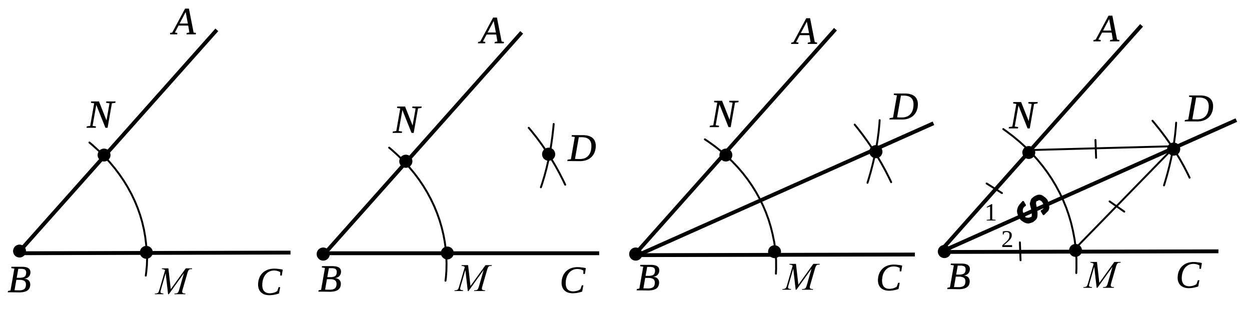
Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

Дано: $\angle ABC$.

Построить: биссектрису $\angle ABC$.

Построение

Проведем окружность с центром в вершине B и произвольным радиусом. Она пресекает стороны угла в точках M и N. Затем проведем две окружности с центрами в точках M и N и тем же радиусом. Точку пересечения этих окружностей обозначим D. Проведем луч BD. Этот луч и будет являться биссектрисой $\angle ABC$.



1) $\omega(B; r)$, r – произвольный радиус; $\omega(B; r) \cap BC = M$; $\omega(B; r) \cap BA = N$;
2) $\omega(M; r)$, $\omega(N; r)$; $\omega(M; r) \cap \omega(N; r) = D$;
3) луч BD – биссектриса $\angle ABC$.

Доказательство

Соединим точку D с точками M и N.

Рассмотрим получившиеся треугольники BND и BMD.

$BN = BM$ как радиусы одной и той же окружности, $ND = MD$ по построению, BD – общая сторона.

Следовательно, $D\ BND$ и $D\ BMD$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, то есть BD – биссектриса данного $\angle ABC$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

Замечание. Данный угол можно разделить с помощью циркуля и линейки также на четыре (восемь, шестнадцать…) равных угла. Для этого нужно разделить его пополам, а затем каждую половину разделить еще раз пополам…

А вот разделить данный угол с помощью циркуля и линейки на три равных угла нельзя. Эта задача, получившая название ***задачи о трисекции угла***, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в позапрошлом веке было доказано, что для произвольного угла такое деление невозможно.