Билет № 19

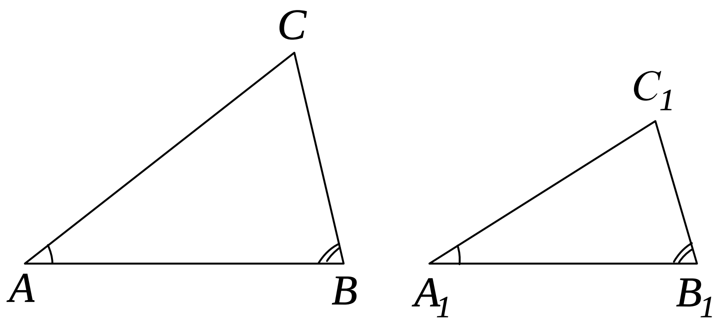
1. Первый признак подобия треугольников.
2. Построение середины данного отрезка.

Вопрос № 1
Первый признак подобия треугольников

Теорема. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Дано: D ABC и D $A_1B_1C_1$, Ð A =∠ A_1, Ð B =Ð B_1.

Доказать: D ABC ~ D $A_1B_1C_1$.



Доказательство

Чтобы доказать, что треугольники подобны, нужно доказать, что их углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны.

По теореме о сумме углов треугольника

ÐC =180^o– (Ð A+Ð B), ÐC_1 =180^o – (Ð A_1 + Ð B_1).

Так как по условию теоремы Ð A =Ð A_1, Ð B =Ð B_1, то Ð C =Ð C_1. Таким образом, углы D ABC соответственно равны углам D $A_1B_1C_1$.

Докажем, что соответствующие стороны D ABC и D $A_1B_1C_1$ пропорциональны. Известно, что если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы, поэтому так как Ð A =Ð A_1 и ÐC = ÐC_1 , то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}.$$

Равны левые части равенств, значит, равны и правые части,

$$\frac{AB \cdot \cancel{AC}}{A_1B_1 \cdot \cancel{A_1C_1}} = \frac{\cancel{CA} \cdot CB}{\cancel{C_1A_1} \cdot C_1B_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично, используя равенства Ð A =Ð A_1, Ð B =Ð B_1, получаем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{BA \cdot BC}{B_1A_1 \cdot B_1C_1};$$

$$\frac{AC \cdot \cancel{AB}}{A_1C_1 \cdot \cancel{A_1B_1}} = \frac{\cancel{BA} \cdot BC}{\cancel{B_1A_1} \cdot B_1C_1} \Rightarrow \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Получили, что сходственные стороны *D ABC* и *D $A_1B_1C_1$* пропорциональны, так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким образом, в *D ABC* и *D $A_1B_1C_1$* углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны, следовательно, по определению *D ABC ~ D $A_1B_1C_1$*.

Итак, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Ч.т.д.

Следствие. Два равносторонних треугольника подобны.

Вопрос № 2

Построение середины данного отрезка

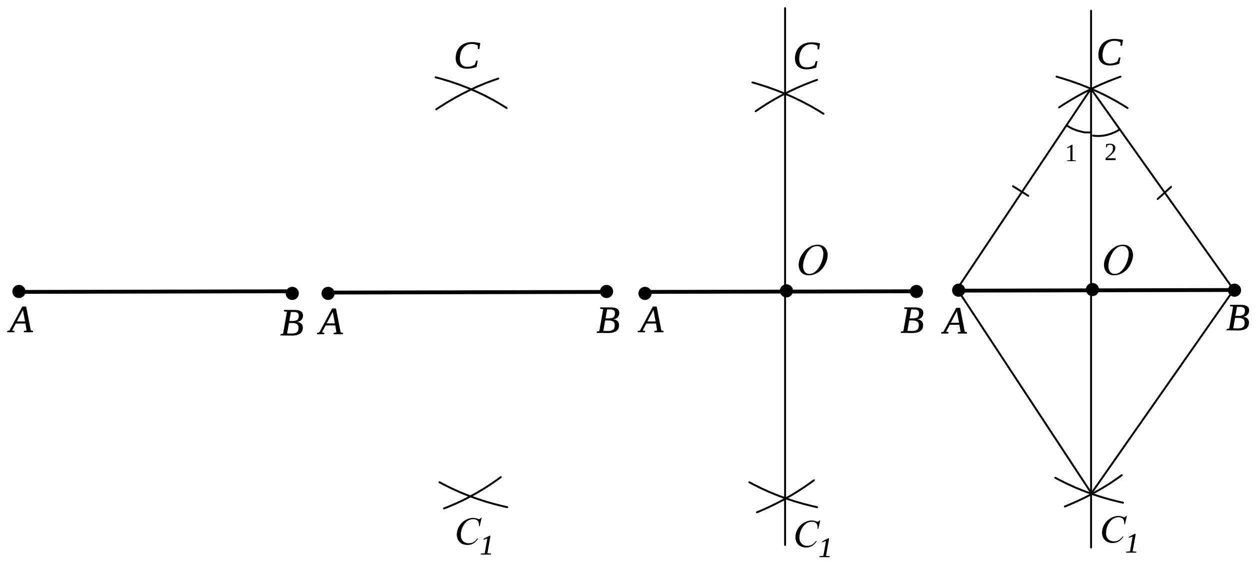
Серединой отрезка называется точка, делящая его пополам, то есть на два равных отрезка.

Дано: отрезок AB.

Построить: точку O так, что $AO = OB$.

Построение

Построим две окружности с центрами A и B произвольного радиуса $r > \frac{1}{2}AB$. Они пресекаются в точках C и C_1. Проведем прямую CC_1. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка.



1) $\omega(A; r)$, $\omega(B; r)$, $r > \frac{1}{2}AB$; $\omega(A; r) \cap \omega(B; r) = C$; C_1;

2) прямая CC_1; $CC_1 \cap AB = O$; O – середина отрезка AB.

Доказательство

Рассмотрим $D\ CAC_1$ и $D\ CBC_1$.

$AC = AC_1$ как радиусы окружности с центром A, $BC = BC_1$ как радиусы окружности с центром B, CC_1 – общая сторона.

Следовательно, $D\ CAC_1 = D\ CBC_1$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 1 = \angle 2$, поэтому CO – биссектриса равнобедренного треугольника ACB. Так как в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является и медианой, то точка O – середина отрезка AB.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.