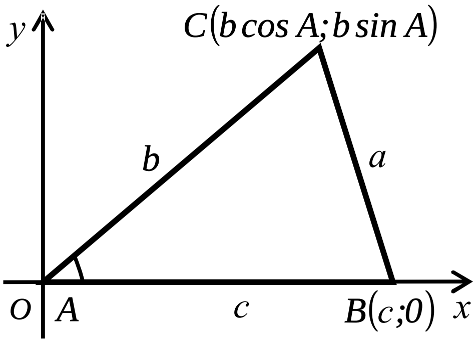
Билет № 18

1. Теорема косинусов.
2. Биссектриса угла. Определение, свойство.

Вопрос № 1
Теорема косинусов

Теорема. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано: *D ABC*, $AB = a$,
$AC = b$, $AB = c$.

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Доказательство

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка A совпала с началом координат, точка B лежала на положительной полуоси Ox, а точка C имела положительную ординату, тогда вершины треугольника будут иметь координаты $A\ (0;\ 0)$, $B\ (c;\ 0)$, $C(b\cos A;\ b\sin A)$.

По формуле расстояния между двумя точками

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ получаем:}$$

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2,$$

$$a^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A,$$

$$a^2 = b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Итак, квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Ч.т.д.

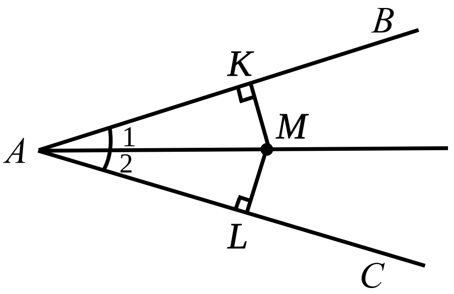
Теорема косинусов впервые была доказана в Средней Азии ученым-математиком ***аль–Бируни (973-1048).*** Ее иногда называют обобщенной теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. Действительно, если в *D ABC* *Ð A* = 90°, то $\cos A = \cos 90° = 0$, то доказанное равенство перепишется в виде $a^2 = b^2 + c^2$, т.е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Вопрос № 2

Биссектриса угла. Определение, свойство

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. На рисунке AM – биссектриса угла BAC, $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема. Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.



Дано: AM **–** биссектриса Ð BAC,
$M \in AM$, $MK \perp AB$, $ML \perp AC$.

Доказать: $MK = ML$

Доказательство

Рассмотрим D AMK и D AML. Они прямоугольные, так как $MK \perp AB$, $ML \perp AC$ по условию теоремы.

$\angle 1 = \angle 2$, так как AM – биссектриса Ð BAC; AM – общая сторона. Следовательно, D AMK = D AML по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и острому углу).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $MK = ML$.

Итак, каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.

Ч.т.д.

Верна и **обратная теорема.**

Теорема. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Дано: Ð BAC, M лежит внутри Ð BAC,
$MK \perp AB$, $ML \perp AC$, $MK = ML$.

Доказать: AM **–** биссектриса Ð BAC.

Доказательство

Рассмотрим D AMK и D AML. Они прямоугольные, так как $MK \perp AB$, $ML \perp AC$ по условию теоремы.

$MK = ML$ по условию теоремы, AM – общая сторона. Следовательно, D AMK = D AML по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, а это означает, что луч AM – биссектриса Ð BAC.

Итак, каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Ч.т.д.

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения биссектрис треугольника – замечательная точка треугольника, так как она является центром вписанной в треугольник окружности.