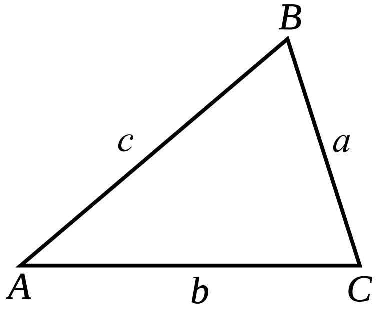
Билет № 17

1. Теорема синусов.
2. Серединный перпендикуляр. Определение, свойство.

Вопрос № 1
Теорема синусов

Теорема. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.



Дано: D ABC, $BC = a$,
$AC = b$, $AB = c$.

Доказать: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Доказательство

По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A,\ S = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

Из первых двух равенств получаем $\dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A$,

$$a\sin C = c\sin A\ \Big|: (\sin A\sin C) \neq 0,$$

$$\frac{a\cancel{\sin C}}{\sin A\cancel{\sin C}} = \frac{c\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A}\sin C},\ \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Точно так же из второго и третьего равенств получаем

$$\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A,\ a\sin B = b\sin A\ \Big|: (\sin A\sin B) \neq 0,$$

$$\frac{a\cancel{\sin B}}{\sin A\cancel{\sin B}} = \frac{b\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A}\sin B},\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Так как $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ и $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$, то $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Итак, стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Ч.т.д.

Замечание. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

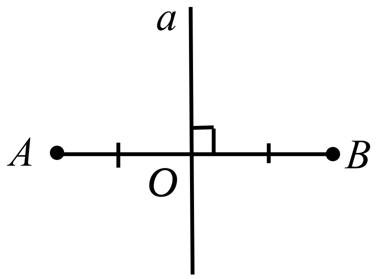
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Вопрос № 2
Серединный перпендикуляр. Определение, свойство

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нем. На рисунке 1 a – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

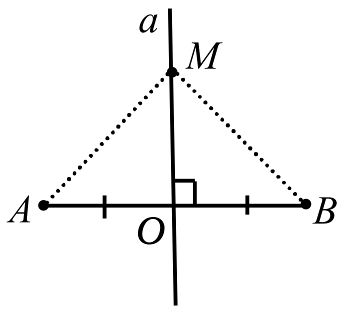
Рис. 1



$a \perp AB$,
$AO = OB$

Теорема. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка (рис. 2).

Рис. 2



Дано: $a \perp AB$, $a \cap AB = O$,
$AO = OB$, $M \hat{I}\ a$.
Доказать: $AM = MB$.

Доказательство

Если точка M совпадает с точкой O, то $AM = MB$, так как $AO = OB$.

Пусть M и O – различные точки. Рассмотрим $D\ OAM$ и $D\ OBM$. Они прямоугольные, так как $a \perp AB$. $AO = OB$ по условию теоремы, OM – общая сторона. Следовательно, $D\ OAM = D\ OBM$ по признаку равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AM = MB$.

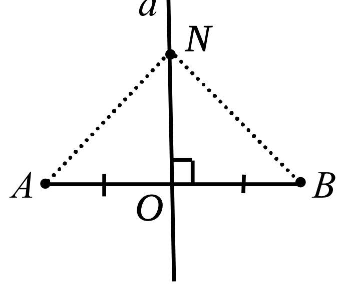
Итак, каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Ч.т.д.

Верна и **обратная теорема.**

Теорема. Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему (рис. 3).

Рис. 3



Дано: $a \cap AB = O$, $AO = OB$,
точка N, $AN = NB$.
Доказать: $N \hat{I}\ a$, $a \perp AB$.

Доказательство

Если точка N Î AB, то она совпадает с точкой O – серединой отрезка AB и поэтому N Î a.

Пусть $N \notin AB$. Рассмотрим D ANB. Он равнобедренный, так как $AN = NB$. Отрезок NO – медиана D ANB, а следовательно, и высота, так как медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию является и высотой.

Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому ON и a совпадают, и, значит, N Î a.

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AM = MB$.

Итак, каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Ч.т.д.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника – замечательная точка треугольника, так как она является центром окружности, описанной около треугольника.