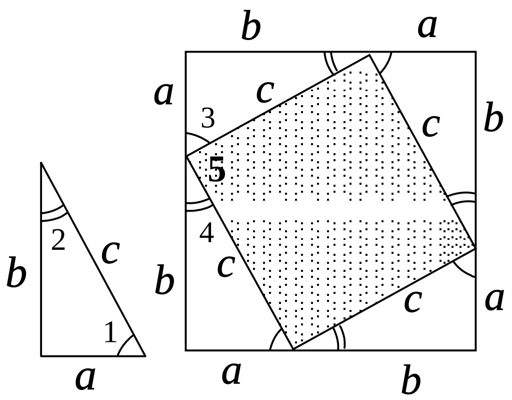
Билет № 16

1. Теорема Пифагора.
2. Центральная симметрия. Определение, примеры.

Билет № 16
Теорема Пифагора

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Дано: прямоугольный треугольник, a, b – катеты, c – гипотенуза.

Доказать: $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке.

Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$.

С другой стороны квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников и квадрата со стороной c.

Докажем, что этот четырёхугольник, действительно, является квадратом.

По построению в четырёхугольнике все стороны равны c, поэтому по признаку параллелограмма он – параллелограмм.

Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$. По построению $\angle 3$ и $\angle 4$ соответственно равны $\angle 1$ и $\angle 2$, значит, $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$. $\angle 3$, $\angle 4$ и $\angle 5$ образуют развёрнутый угол, поэтому $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, следовательно, $\angle 5 = 90^\circ$.

Получили, что в параллелограмме один из углов прямой, поэтому по признаку прямоугольника он – прямоугольник, а так как в прямоугольнике все стороны равны, то он является квадратом.

Итак, площадь получившегося квадрата равна сумме площадей четырёх прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и площади квадрата со стороной c, которая равна c^2.

Следовательно, $S = 4\cdot\frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$.

Таким образом, $S = (a + b)^2$ и $S = 2ab + c^2$, отсюда,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Итак, в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Ч.т.д.

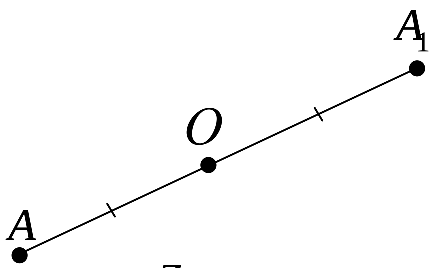
Замечание. В настоящее время насчитывается более ста различных доказательств теоремы Пифагора, поэтому она даже попала в Книгу рекордов Гиннеса. Однако принципиально различных идей в этих доказательствах используется сравнительно немного.

Вопрос № 2
Центральная симметрия. Определение, примеры

Если каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке, то говорят, что дано ***отображение плоскости на себя.***

Примером отображения плоскости на себя является центральная симметрия.

Две точки A и A_1 называются ***симметричными относительно точки О***, если О – середина отрезка AA_1.



$$A \xrightarrow{Z_0} A_1$$

Рис. 1

Построение

1) A, O – центр симметрии;
2) AO;
3) $OA_1 = OA$, $OA_1 \subset OA$;
4) A_1 – искомая.

Пусть точка O – центр симметрии.

Возьмем произвольную точку A, и построим симметричную ей точку A_1 относительно точки O.

Для этого проведем прямую AO и отложим на ней отрезок $OA_1 = AO$.

Точка A_1 – искомая.

Точка O считается симметричной самой себе: $O \xrightarrow{Z_0} O$.

Если точка A совпадает с центром симметрии, то она тоже считается симметричной самой себе: $A \xrightarrow{Z_0} A$.

Мы видим, что с помощью центральной симметрии каждой точке A плоскости ставится в соответствие точка A_1 этой же плоскости. При этом любая точка A_1 оказывается сопоставленной некоторой точке A. Значит, центральная симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

Фигура называется ***симметричной относительно точки О***, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.

Точка О называется ***центром симметрии фигуры***. Говорят, что «фигура обладает центральной симметрией».

Примеры фигур, обладающих центральной симметрией

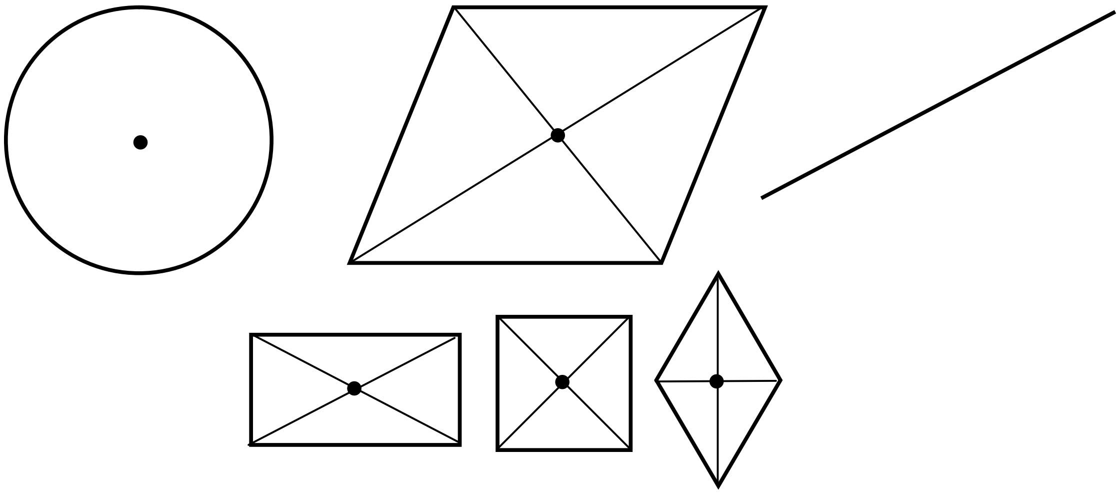


Рис. 2

Центром симметрии окружности является центр окружности.

Центром симметрии параллелограмма (прямоугольника, квадрата, ромба) является точка пересечения его диагоналей.

Прямая также обладает центральной симметрией, но в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точку *O*), у прямой их бесконечно много – любая точка прямой является центром симметрии.

Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является треугольник.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют центр симметрии. С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией. В большинстве случаев симметричны относительно центра лепестки цветов, узоры на коврах, тканях. Симметричны многие детали механизмов, например, зубчатые колеса.

Центральная симметрия обладает важным свойством, сформулированным в следующей теореме.

Теорема. Центральная симметрия является движением, то есть отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние между точками.

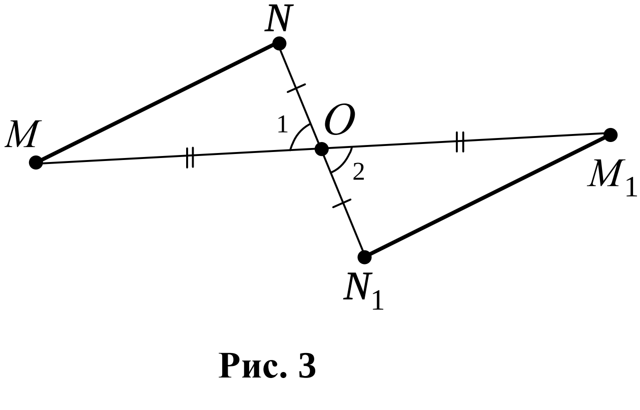


Рис. 3

Дано: M, N, $M \xrightarrow{Z_0} M_1$,

$N \xrightarrow{Z_0} N_1$.

Доказать: $MN = M_1N_1$.

Доказательство

Рассмотрим $D\ OMN$ и $D\ OM_1N_1$.

По условию теоремы $M \xrightarrow{Z_0} M_1, N \xrightarrow{Z_0} N_1$, поэтому $MO = OM_1$ и $NO = ON_1$; $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные.

Следовательно, $D\ OMN = D\ OM_1N_1$ по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $MN = M_1N_1$. Значит, расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M_1 и N_1.

Итак, центральная симметрия является отображением плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками, то есть является движением плоскости.

Ч.т.д.

Замечание. Центральную симметрию можно представить как поворот всей плоскости вокруг точки O на 180°.