Билет № 15

1. Теорема Фалеса.
2. Осевая симметрия. Определение, примеры.

Вопрос № 1
Теорема Фалеса

Теорема. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Дано: l_1, l_2; $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots \in l_1$; $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$;
$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel \ldots$; $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots \in l_2$.

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$

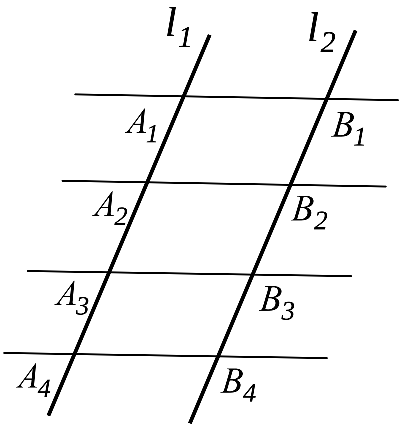


Рис. 1

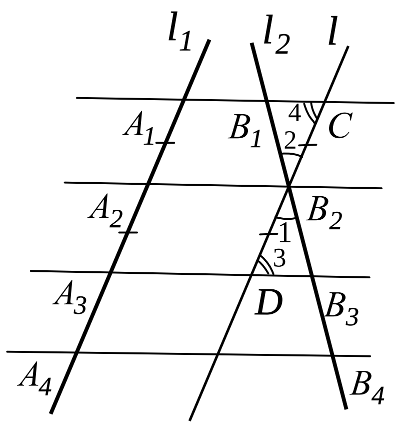


Рис. 2

Доказательство

I. Рассмотрим случай, когда $l_1 \parallel l_2$ (рис. 1).

Четырёхугольник $A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм по определению, так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ по условию теоремы, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ как отрезки, лежащие на параллельных прямых l_1 и l_2. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $A_1A_2 = B_1B_2$. Аналогично доказывается, что $A_2A_3 = B_2B_3$, $A_3A_4 = B_3B_4$; … . А так как $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

II. Рассмотрим случай, когда $l_1 \nparallel l_2$ (рис. 2).

Через точку B_2 проведём прямую $l \parallel l_1$, $l \cap A_1B_1 = C$, $l \cap A_3B_3 = D$.

Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$ по пункту I. Рассмотрим получившиеся D B_2B_1C и D B_2B_3D: а) $CB_2 = B_2D$ по доказанному выше; б) Ð 1 = Ð 2 как вертикальные углы; в) Ð 3 = Ð 4 как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 секущей l.

Следовательно, D B_2B_1C = D B_2B_3D по II признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично доказывается, что $B_2B_3 = B_3B_4$.

Итак, если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

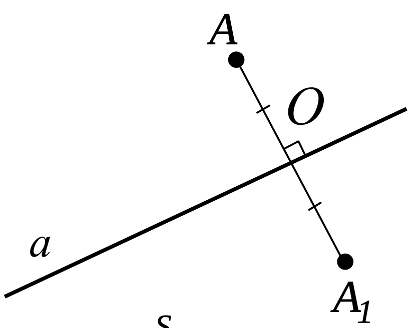
Ч.т.д.

Вопрос № 2
Осевая симметрия. Определение, примеры

Если каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке, то говорят, что дано ***отображение плоскости на себя.***

Примером отображения плоскости на себя является осевая симметрия.

Две точки A и A_1 называются ***симметричными относительно прямой а***, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему.



$$A \xrightarrow{S_a} A_1$$

Рис. 1

Построение

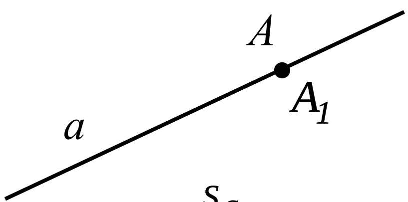
1) a, $A \notin a$;
2) $AO \perp a$; $OA \cap a = O$;
3) $OA_1 = OA$, $OA_1 \subset OA$;
4) A_1 – искомая.

Пусть прямая a – ось симметрии.

Возьмем произвольную точку A, не лежащую на прямой a, и построим симметричную ей точку A_1 относительно прямой a.

Для этого проведем перпендикуляр AO к прямой a и отложим на прямой AO от точки O отрезок $OA_1 = AO$.

Точка A_1 – искомая.



$$A \xrightarrow{S_a} A_1$$

Рис. 2

Если точка A лежит на прямой a, то симметричная с ней точка A_1 совпадает с точкой A.

Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точка A плоскости ставится в соответствие точка A_1 этой же плоскости. При этом любая точка A_1 оказывается сопоставленной некоторой точке A. Значит, осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

Фигура называется ***симметричной относительно прямой а***, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре.

Прямая а называется ***осью симметрии фигуры***. Говорят, что «фигура обладает осевой симметрией».

Примеры фигур, обладающих осевой симметрией

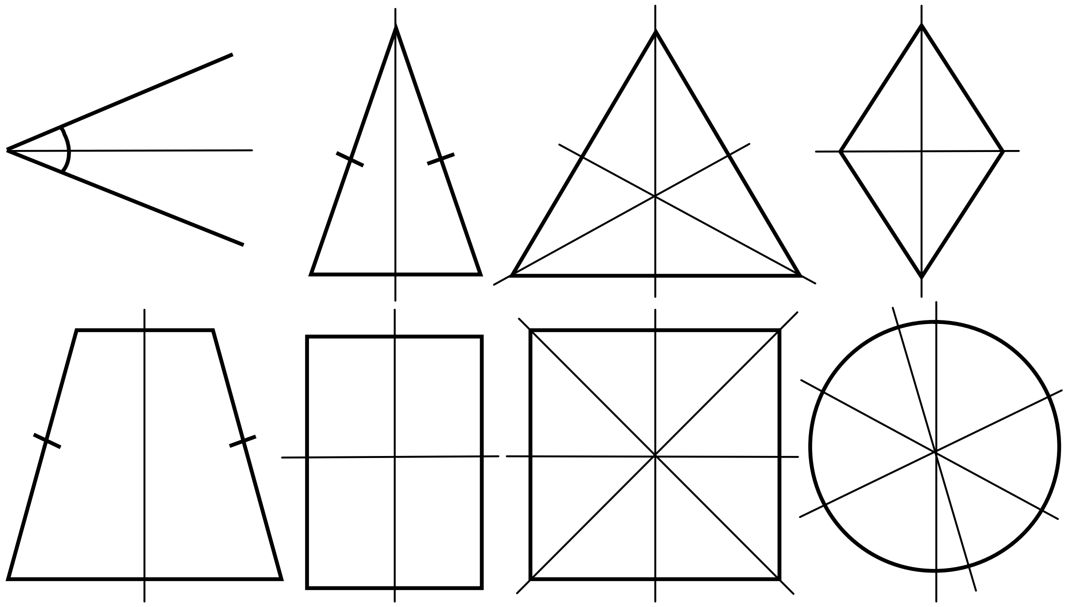


Рис. 3

<u>Фигуры, не обладающие осевой симметрией</u>:

- параллелограмм, но не прямоугольник и не ромб,
- разносторонний треугольник,
- неравнобедренная трапеция.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно стебля.

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией. В большинстве случаев симметричны относительно оси узоры на коврах, тканях, обоях. Симметричны многие детали механизмов.

Осевая симметрия обладает важным свойством, сформулированным в следующей теореме.

Теорема. Осевая симметрия является движением, то есть отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние между точками.

Дано: M, N, $M \xrightarrow{S_a} M_1,\ N \xrightarrow{S_a} N_1$.

Доказать: $MN = M_1N_1$.

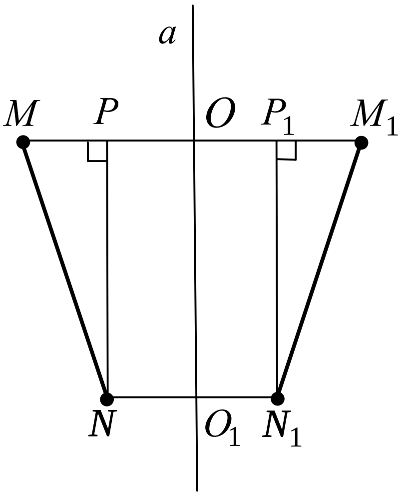


Рис. 4

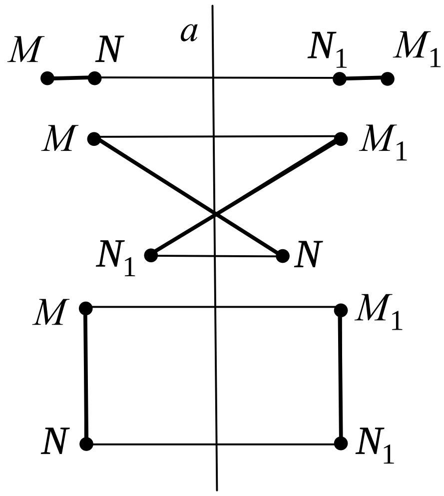


Рис. 5

Доказательство

Из точек N и N_1 проведем перпендикуляры NP и N_1P_1 к прямой MM_1. Рассмотрим получившиеся прямоугольные треугольники MNP и $M_1N_1P_1$:

По условию теоремы, $M \xrightarrow{S_a} M_1, N \xrightarrow{S_a} N_1$, поэтому $MO = OM_1$ и $NO_1 = O_1N_1$, $MM_1 \perp a$ и $NN_1 \perp a$.

Так как перпендикуляры к одной прямой параллельны, то $MM_1 \parallel NN_1$. Значит, $NP = N_1P_1$ как расстояния между параллельными прямыми MM_1 и NN_1.

Так как на прямой NN_1 отложены равные отрезки NO_1, O_1N_1 и через их концы проведены параллельные прямые NP и N_1P_1 ($NP \parallel N_1P_1$ как перпендикуляры к прямой MM_1), то по теореме Фалеса $PO = OP_1$, значит и $MP = M_1P_1$.

Получили, что $NP = N_1P_1$ и $MP = M_1P_1$. Следовательно, $D\ MNP = D\ M_1N_1P_1$ по признаку равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому гипотенузы также равны, то есть $MN = M_1N_1$. Значит, расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M_1 и N_1.

Возможны другие случаи расположения точек M, N и M_1, N_1, они представлены на рисунке 5, в каждом из них $MN = M_1N_1$.

Итак, осевая симметрия является отображением плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками, то есть является движением плоскости.

Ч.т.д.

Замечание. Осевую симметрию можно представить как поворот плоскости в пространстве на 180° вокруг оси a.