Билет № 14

1. Признаки параллелограмма.
2. Параллельный перенос. Определение, примеры.

Вопрос № 1
Признаки параллелограмма

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \| CD$, $AD \| BC$.

Признаки параллелограмма

[Признак параллелограмма – «примета», условие, по которому можно узнать параллелограмм].

I. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

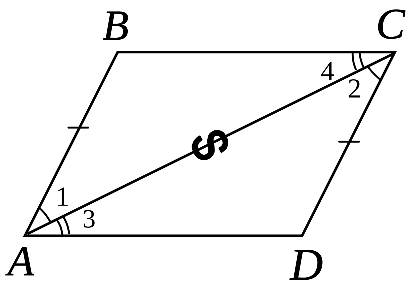
II. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

III. Если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

IV. Если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Докажем один из них.

Теорема. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.



Дано: $ABCD$ – четырёхугольник, $AB \| CD$, $AB = CD$.

Доказать: $ACBD$ – параллелограмм.

Доказательство

Проведём диагональ AC. Рассмотрим получившиеся D ABC и D CDA: AC – общая сторона; $AB = CD$ по условию теоремы; Ð 1 = Ð 2 как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC. Следовательно, D ABC = D CDA по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому Ð 3 = Ð 4. Но Ð 3 и Ð 4 – накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых AD и BC секущей AC, поэтому по признаку параллельности прямых $AD \| BC$.

Получили, что в четырёхугольнике $ABCD$ противолежащие стороны параллельны: $AB \| CD$ по условию, $AD \| BC$ по доказанному, значит четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм по определению.

Итак, если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

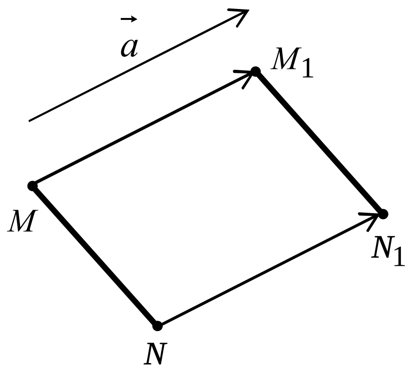
Ч.т.д.

Вопрос № 2
Параллельный перенос, Определение, примеры

Пусть $\vec{a}$ – данный вектор.

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$.

Теорема. Параллельный перенос является движением, то есть отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние.



Дано: $\vec{a}$, $M \xrightarrow{\vec{a}} M_1$, $N \xrightarrow{\vec{a}} N_1$.

Доказать: $MN = M_1N_1$.

Доказательство

Рассмотрим общий случай, когда точки M и N не лежат на одной прямой.

По условию теоремы при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки M и N отображаются соответственно в точки M_1 и N_1, при этом $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, то есть $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Так как векторы $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{NN_1}$равны, то $MM_1 \| NN_1$ и $MM_1 = NN_1$.

Рассмотрим четырехугольник MM_1N_1N, в нем $MM_1 \| NN_1$ и $MM_1 = NN_1$, то есть в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, поэтому четырехугольник MM_1N_1N – параллелограмм по признаку параллелограмма.

В параллелограмме противолежащие стороны равны, значит, $MN = M_1N_1$, следовательно, расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1.

Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, а по определению отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние, называется движением.

Итак, параллельный перенос является движением.

Ч.т.д.

Наглядно параллельный перенос можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора $\vec{a}$ на его длину.