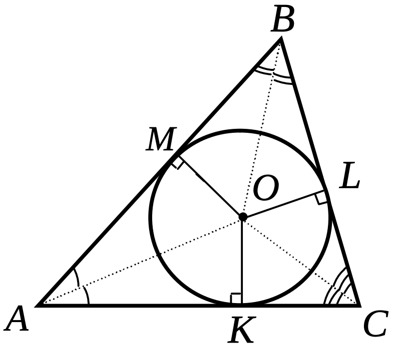
Билет № 12

1. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.
2. Формула площади трапеции. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования».

Вопрос № 1
Теорема об окружности, вписанной в треугольник

Если все стороны треугольника касаются окружности, то ***окружность*** называется ***вписанной в треугольник***, а треугольник – описанным около этой окружности.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность.



Дано: *D ABC*.

Доказать: в *D ABC* можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный *D ABC*. Проведём биссектрисы треугольника, точку их пересечения обозначим буквой *O*. Из точки *O* опустим перпендикуляры *OM*, *OL* и *OK* соответственно к сторонам *AB*, *BC* и *AC*.

Так как каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон, то точка *O* равноудалена от сторон *D ABC*, т.е. *OM* = *OL* = *OK*. Поэтому окружность с центром *O* радиуса *OK* проходит через точки *M*, *L* и *K*. Стороны треугольника *D ABC* касаются этой окружности в точках *M*, *L* и *K*, так как они перпендикулярны к радиусам *OM*, *OL* и *OK*. Значит, окружность с центром *O* радиуса *OK* является вписанной в *D ABC*.

Итак, в любой треугольник можно вписать окружность, центром которой будет точка пересечения биссектрис треугольника, а радиусами – перпендикуляры, опущенные из центра окружности к сторонам треугольника.

Ч.т.д.

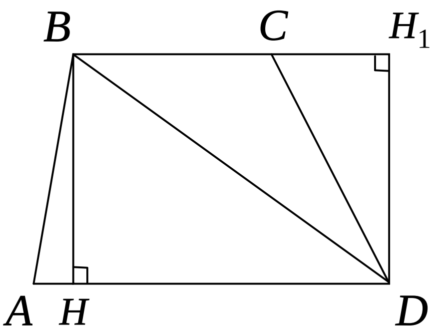
Замечание. В треугольник можно вписать только одну окружность.

Допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой *O* – точкой пересечения биссектрис треугольника. Радиус каждой окружности равен расстоянию от точки *O* до сторон треугольника. Так как из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр, то радиусы окружностей совпадают. Следовательно, эти окружности совпадают.

Вопрос № 2
Формула площади трапеции. Запись, вывод

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.



Дано: $ABCD$ – трапеция,
BC и AD – основания,
BH – высота.

***Доказать*:** $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$.

Доказательство

Диагональ BD разделяет трапецию $ABCD$ на $D\ ABD$ и $D\ BCD$, поэтому по свойству площадей $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$.

В $D\ ABD$ AD – основание, BH – высота, поэтому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH$.

В $D\ BCD$ BC – основание, DH_1 – высота, поэтому $S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1$.

Так как $BH = DH_1$, то $S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot BH$.

Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH$,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Итак, площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Ч.т.д.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту: $\boxed{S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h}$, a и b – основания трапеции, h – её высота.

Площадь трапеции равна половине произведения её диагоналей на синус угла между ними: $\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha}$, d_1 и d_2 – диагонали трапеции, a – угол между ними.