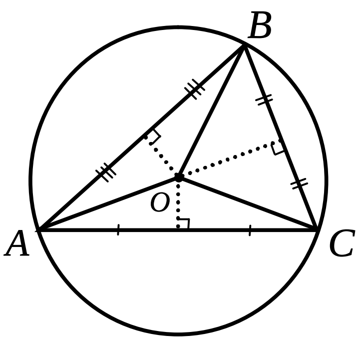
Билет № 11

1. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
2. Тригонометрические тождества. Примеры, доказательства.

Вопрос № 1
Теорема об окружности, описанной около треугольника

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то ***окружность*** называется ***описанной около треугольника***, а треугольник – вписанным в эту окружность.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность.



***Дано*:** D *ABC*.

***Доказать*:** около D *ABC* можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный D *ABC*. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, точку их пересечения обозначим буквой *O*. Соединим точку *O* с вершинами *A*, *B* и *C*.

Так как точка пересечения серединных перпендикуляров равноудалена от вершин D *ABC*, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром *O* радиуса *OA* проходит через все три вершины треугольника, и значит, является описанной около D *ABC*.

Итак, около любого треугольника можно описать окружность, центром которой является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиусом – расстояние от центра окружности до любой вершины треугольника.

Ч.т.д.

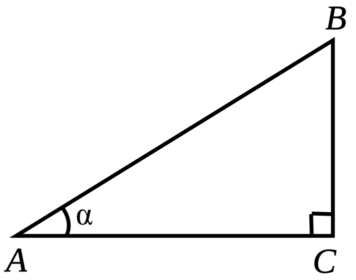
Замечание 1. Около треугольника можно описать только одну окружность.

Допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от вершин треугольника и, значит, совпадает с точкой *O* – точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Так как радиус каждой окружности равен расстоянию от точки *O* до вершин треугольника, то радиусы окружностей совпадают. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; на середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Вопрос № 2

Тригонометрические тожества. Примеры, доказательства



D ABC – прямоугольный,
Ð C – прямой,
BC – катет, противолежащий углу α,
AC – катет, прилежащий углу α.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: $sin\,\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе: $cos\,\alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $tg\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

Разделим синус угла α на косинус угла α:

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}},\ cos\alpha \neq 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый угол.}$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету: $ctg\alpha = \dfrac{AC}{BC}$.

Разделим косинус угла α на синус угла α:

$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} = ctg\alpha, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}},\ sin\alpha \neq 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый угол.}$$

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы этих углов равны.

$\boxed{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ – основное тригонометрическое тождество, докажем его для острого угла прямоугольного треугольника.

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{\overbrace{BC^2 + AC^2}^{\textit{по теореме Пифагора}}}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Умножим тангенс угла α на котангенс угла α:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \cdot \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = 1, \text{ т.е.}$$

$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$, $cos\alpha \neq 0$, $sin\alpha \neq 0$, т.к. α – острый угол.

Из формулы $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ непосредственно вытекают следующие формулы:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}; \qquad \boxed{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}.$$

Разделим левую и правую часть основного тригонометрического тождества на $\cos^2\alpha \neq 0$:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \,\Big|\, : \cos^2\alpha \neq 0,$$

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}}$$

Разделим левую и правую часть основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha \neq 0$:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \,\Big|\, : \sin^2\alpha \neq 0,$$

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}}$$