# Билет № 10

1. Теорема о средней линии трапеции.
2. Формулы площади треугольника. Запись, вывод одной из них.

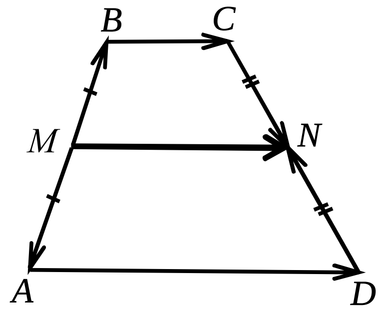
## Вопрос № 1
## Теорема о средней линии трапеции

***Трапецией*** называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её ***основаниями***, а непараллельные стороны – ***боковыми сторонами***.

На рисунке $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $BC$ и $AD$ – основания, $AB \nparallel CD$, $AB$ и $CD$ – боковые стороны.

***Средней линией трапеции*** называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. На рисунке $MN$ – средняя линия трапеции $ABCD$, так как $AM = MB$, $CN = ND$.

***Теорема.*** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.




***Дано***: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$,
$MN$ – средняя линия.
***Доказать:*** $MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$,
$MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

***Доказательство***

По правилу многоугольника сложения нескольких векторов $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим $2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}\right)$.

По условию теоремы $MN$ – средняя линия трапеции, поэтому $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $CD$, а $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{DN}$ – противоположные векторы. Так как сумма противоположных векторов равна нулевому вектору, то $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$, отсюда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Так как $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, а длина вектора $\overrightarrow{BC + AD}$ равна $BC + AD$. Отсюда следует, что $MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

***Итак,*** средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

***Ч.т.д.***

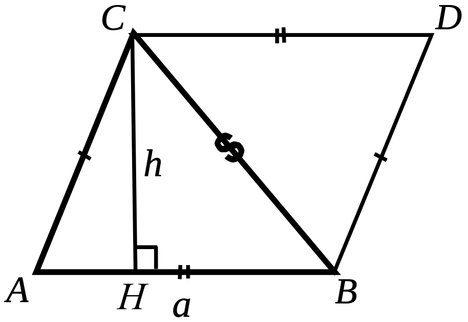
# Вопрос № 2

## Формулы площади треугольника. Запись, вывод одной из них

Одну из сторон треугольника часто называют его основанием. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведенную к основанию.

***Теорема.*** Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

**Рис. 1**




***Дано***: $D\,ABC$, $AB = a$, $CH = h$.

***Доказать***: $S_{D\,ABC} = \frac{1}{2}ah$.

***Доказательство***

Достроим треугольник $ABC$ до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 1. Рассмотрим треугольники $ABC$ и $DCB$.

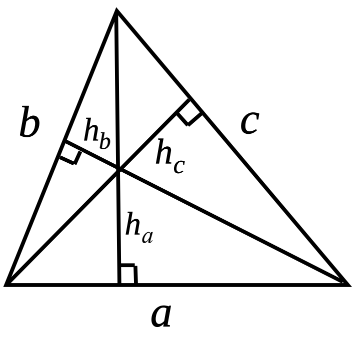
$AC = BD$ и $AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма, $BC$ – общая сторона. Следовательно, $D\,ABC = D\,DCB$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам).

Равные фигуры имеют равные площади, поэтому $S_{D\,ABC} = S_{D\,DCB}$. По свойству площадей площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников, из которых он составлен, поэтому $S_{ABDC} = S_{D\,ABC} + S_{D\,DCB} = 2\,S_{D\,ABC}$. Значит, площадь $D\,ABC$ равна половине площади параллелограмма $ABDC$.

Площадь параллелограмма $ABDC$ равна произведению его основания $a$ на высоту $h$, следовательно, $S_{D\,ABC} = \frac{1}{2}ah$.

***Итак,*** площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

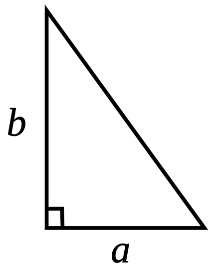
***Ч.т.д.***




$$S_D = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

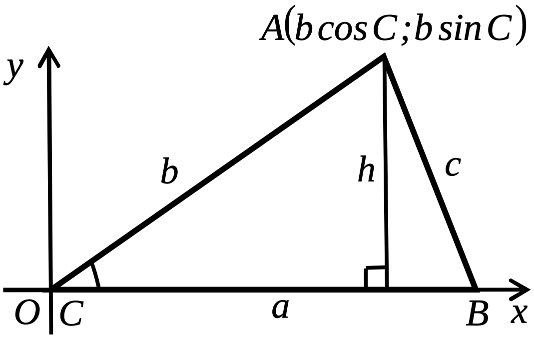
## Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.




$$S_D = \frac{1}{2}\ ab$$

***Теорема.*** Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.




***Дано***: *D ABC, BC = a,*
*AC = b.*

***Доказать***: $S = \frac{1}{2}ab\sin C.$

### *Доказательство*

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка *C* совпала с началом координат, точка *B* лежала на положительной полуоси *Ox*, а точка *A* имела положительную ординату, тогда вершины треугольника будут иметь координаты *C (0; 0)*, *B (a; 0)*, *A(bcosC; bsinC)*.

Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где $h$ – высота треугольника. Но $h$ равна ординате точки *A*, т.е. $h = b\sin C$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

***Итак,*** площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

***Ч.т.д.***

## Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где *a*, *b, c* – стороны треугольника,
*p* – полупериметр треугольника,

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

## Площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где *a* – сторона треугольника.

**Площадь треугольника**
**через радиус описанной окружности**

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника,
$R$ – радиус описанной окружности.

**Площадь треугольника**
**через радиус вписанной окружности**

$$S = rp,$$

$p$ – полупериметр треугольника,
$r$ – радиус вписанной окружности.