Билет № 9

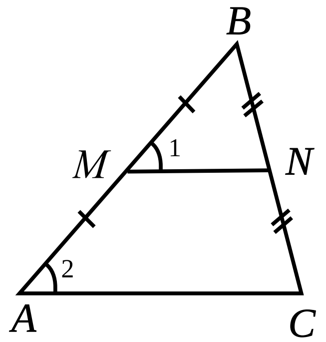
1. Теорема о средней линии треугольника.
2. Формула площади круга. Запись, вывод.

Вопрос № 1
Теорема о средней линии треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке MN – средняя линия ΔABC, так как $AM = MB$ и $BN = NC$.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Дано: $D\ ABC$, MN – средняя линия.

Доказать: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Доказательство

Рассмотрим $D\ BMN$ и $D\ BAC$. В треугольниках $\angle B$ – общий, а $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$, так как MN – средняя линия. Следовательно, $D\ BMN \sim D\ BAC$ по II признаку подобия треугольников (по двум пропорциональным сторонам и углу, заключённому между ними).

В подобных треугольниках соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$.

Так как $\angle 1 = \angle 2$ и они являются соответственными углами, образованными при пересечении прямых MN и AC секущей AB, то $MN \parallel AC$ по признаку параллельности прямых, согласно которому, если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны. А так как $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$, то $MN = \frac{1}{2}AC$.

Итак, средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Ч.т.д.

Вопрос № 2

Формула площади круга. Запись, вывод

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

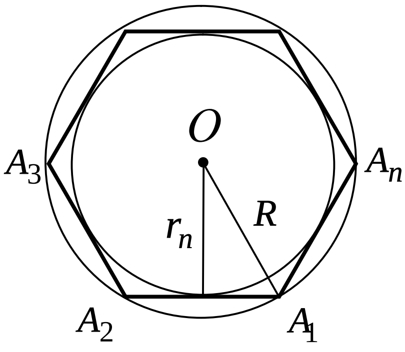


Рис.1

Выведем формулу для нахождения площади круга. Для этого рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 1). Площадь S данного круга больше площади S_n n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, так как n-угольник полностью содержится в круге, а площадь S_n' круга, вписанного в n-угольник, меньше S_n, так как этот круг полностью содержится в n-угольнике, то есть $S_n' < S_n < S$.

Известно, что $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$, где r_n – радиус вписанной в n-угольник окружности. Будем неограниченно увеличивать число сторон n-угольника. При $n \to \infty$ $\frac{180°}{n} \to 0$, тогда $\cos\frac{180°}{n} \to 1$, поэтому $r_n \to R$. Значит, при неограниченном увеличении числа сторон n-угольника вписанная в него окружность «стремиться» к описанной окружности, то есть $S_n' \to S$ при $n \to \infty$.

Известно, что $S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$, где S_n – площадь правильного n-угольника, P_n – его периметр, r_n – радиус вписанной окружности.

Учитывая, что , r_n ® R, $P_n \to C$, где C – длина окружности, ограничивающая круг, то есть $P_n \to 2\pi R$, а $S_n \to S$ при $n \to \infty$, получаем, что $S = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Итак, для вычисления площади S круга радиуса R получили формулу

$$\boxed{S = \pi R^2}.$$

Так как $D = 2R$, то получаем формулу для вычисления площади круга диаметра D:

$$\boxed{S = \frac{\pi D^2}{4}}.$$

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (рис. 2).

Выведем формулу для нахождения площади кругового сектора S радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α.

a	S
$360°$	πR^2
$1°$	$\frac{\pi R^2}{360°}$
α	$\frac{\pi R^2}{360°}\alpha$

Итак, площади кругового сектора S радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α, вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha}.$$

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 3).Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta},$$

где α – градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_Δ – площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «–» надо брать, когда $\alpha < 180°$, а знак «+» надо брать, когда $\alpha > 180°$.

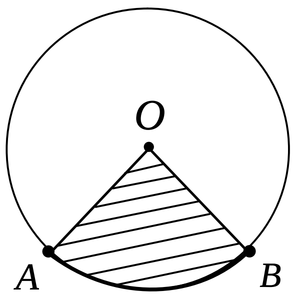


Рис.2

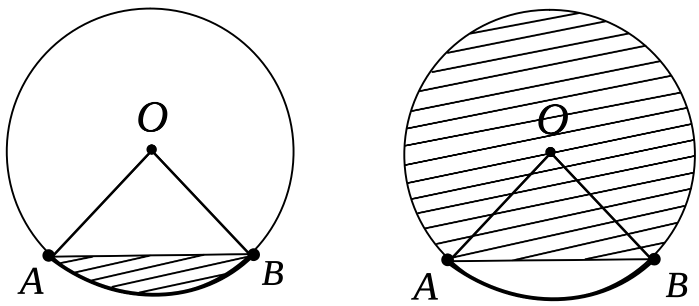


Рис.3

Замечание. В течение многих веков математики решали задачу ***о квадратуре круга:*** построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга, но лишь в конце XIX века было доказано, что такое построение невозможно.