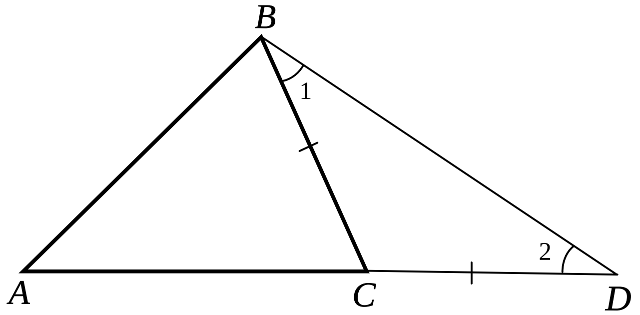
Билет № 8

1. Теорема о соотношении между сторонами треугольника (неравенство треугольника).
2. Формула для радиуса окружности, вписанной в правильный n-угольник. Запись, вывод.

Вопрос № 1

Теорема о соотношении между сторонами треугольника (неравенство треугольника)

Теорема. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.



Дано: D ABC.

Доказать: $AB < AC + CB$
($AC < AB + BC$,
$BC < AB + AC$).

Доказательство

Отложим на продолжении стороны AC отрезок $CD = CB$.

Рассмотрим D BCD. Так как $CD = CB$ по построению, то D BCD – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим D ABD. В нем $\angle 1 < \angle ABD$, а так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 2 < \angle ABD$. В треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона, поэтому $AB < AD$.

$AD = AC + CD$, а так как $CD = CB$, то $AD = AC + CB$. Следовательно, $AB < AC + CB$.

Аналогично доказывается, что $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$.

Итак, каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Ч.т.д.

Следствие. Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства:

$$AB < AC + CB,$$
$$AC < AB + BC,$$
$$BC < AB + AC.$$

Каждое из этих неравенств называется ***неравенством треугольника.***

Если все точки A, B и C различны и лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими. В этих случаях выполняются равенства:

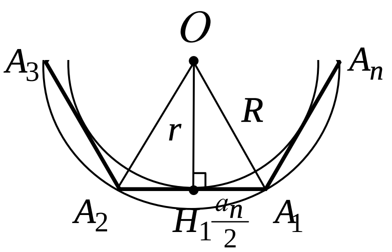
$$AB = AC + CB,$$
$$AC = AB + BC,$$
$$BC = AB + AC.$$

Следовательно, каковы бы ни были три точки, расстояние между двумя из этих точек не больше (меньше или равно) суммы расстояний от них до третьей точки, то есть

AB £ *AC* + *CB*,
AC £ *AB* + *BC*,
BC £ *AB* + *AC*.

Вопрос № 2

Формула для радиуса окружности, вписанной в правильный *n*-угольника. Запись, вывод



Дано: $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – правильный n-угольник,
$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = a_n$,
$\omega(O; R)$ описана около n-угольника,
$\omega(O; r)$ вписана в n-угольник.

Выразить: 1) r через R; 2) r через a_n.

Решение

Соединим точку O с вершинами A_1 и A_2 n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$. В получившемся D A_1OA_2 проведем высоту $OH_1 = r$.

Так как $OA_1 = OA_2 = R$, то D A_1OA_2 – равнобедренный, а высота OH_1 является медианой и биссектрисой, поэтому $A_1H_1 = \dfrac{a_n}{2}$, $\angle A_1OH_1 = \dfrac{\angle A_1OA_2}{2}$.

Так как $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – правильный n-угольник, то центральный угол $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360°}{n}$, а $\angle A_1OH_1 = \dfrac{360°}{n} : 2 = \dfrac{360°}{n}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{180°}{n}$.

Так как OH_1 – высота по построению, то D A_1OH_1 – прямоугольный. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°, поэтому $\angle H_1A_1O = 90° - \angle A_1OH_1 = 90° - \dfrac{180°}{n}$.

В D A_1OH_1 $sin\,\angle H_1A_1O = \dfrac{OH_1}{OA_1}$; $sin\left(90° - \dfrac{180°}{n}\right) = \dfrac{r}{R}$.

Используя формулу приведения $\boxed{sin\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha}$, получаем, что $cos\dfrac{180°}{n} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow \boxed{r = R\,cos\dfrac{180°}{n}}$.

В D A_1OH_1 $tg\angle A_1OH_1 = \dfrac{A_1H_1}{OH_1}$; $tg\dfrac{180°}{n} = \dfrac{\frac{a_n}{2}}{r}$; $\Rightarrow r = \dfrac{\frac{a_n}{2}}{tg\frac{180°}{n}} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{a_n}{2tg\frac{180°}{n}}}$

Ответ: $r = R\,cos\dfrac{180°}{n}$; $r = \dfrac{a_n}{2tg\frac{180°}{n}}$.

Если n = 3, то $r_3 = R\cos\frac{180^\circ}{3} = R\cos 60^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$.

Если n = 4, то $r_4 = R\cos\frac{180^\circ}{4} = R\cos 45^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Если n = 6, то $r_6 = R\cos\frac{180^\circ}{6} = R\cos 30^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Если n = 3, то $r_3 = \dfrac{a}{2tg\frac{180^\circ}{3}} = \dfrac{a}{2tg 60^\circ} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Если n = 4, то $r_4 = \dfrac{a}{2tg\frac{180^\circ}{4}} = \dfrac{a}{2tg 45^\circ} = \dfrac{a}{2 \cdot 1} = \dfrac{a}{2}$.

Если n = 6, то $r_6 = \dfrac{a}{2tg\frac{180^\circ}{6}} = \dfrac{a}{2tg 30^\circ} = \dfrac{a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow \boxed{R = \frac{r}{\cos\frac{180^\circ}{n}}};\ r = \frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \boxed{a_n = 2rtg\frac{180^\circ}{n}}$$