Билет № 7

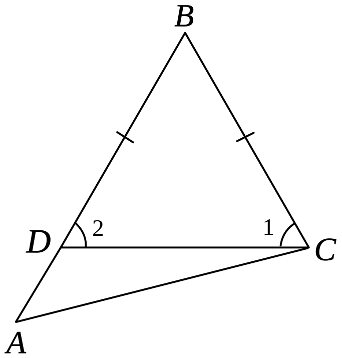
1. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника.
2. Формула для радиуса окружности, описанной около правильного n-угольника. Запись, вывод.

Вопрос № 1

Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника

Теорема. В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; и наоборот, 2) против большего угла лежит большая сторона.

Сначала докажем, что против большей стороны лежит больший угол.



Дано: D ABC, $AB > BC$.

Доказать: $\angle C > \angle A$.

Доказательство

На стороне AB отложим отрезок $BD = BC$. Так как $BC < AB$, то и $BD < AB$, поэтому точка D лежит между точками A и B. Следовательно, $\angle 1$ является частью $\angle C$ D ABC. Значит, $\angle C > \angle 1$.

Так как $\angle 2$ – внешний угол D ADC при вершине D, то $\angle 2 > \angle A$, потому что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Так как $BC = BD$ по построению, то D BCD равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного D BCD.

Получили. что, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle A$, значит, $\angle C > \angle A$.

Итак, в треугольнике: против большей стороны лежит больший угол.

Теперь докажем, что против большего угла лежит большая сторона.

Дано: D ABC, $\angle C > \angle A$.

Доказать: $AB > BC$.

Доказательство (методом от противного)

1) Предположим, что $AB > BC$ – неверно. Тогда либо $AB = BC$, либо $AB < BC$.
2) Если $AB = BC$, то D ABC – равнобедренный и, значит, $\angle C = \angle A$.
   Если $AB < BC$, то $\angle C < \angle A$ по доказанному выше.
   Получили, что$\angle C = \angle A$ или $\angle C < \angle A$. И то, и другое противоречит условию теоремы, что $\angle C > \angle A$.
3) Получили противоречие с условием теоремы. Значит предположение, что $AB > BC$ – неверно было неверным, значит $AB > BC$.

Итак, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Ч.т.д.

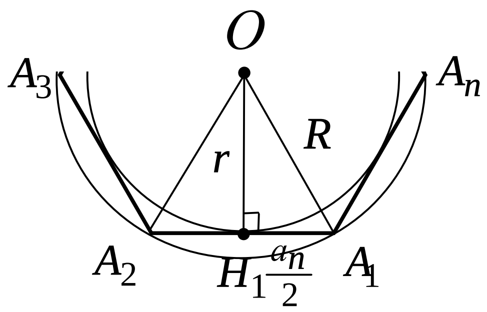
Доказанную теорему можно сформулировать следующим образом: в треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол; и наоборот, против меньшего угла лежит меньшая сторона.

Следствия

1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
2) Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Вопрос 2

Формула для радиуса окружности, описанной около правильного n-угольника. Запись, вывод



Дано: $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – правильный n-угольник,
$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = a_n$,
$\omega(O;\ R)$ описана около n-угольника,
$\omega(O;\ r)$ вписана в n-угольник.

Выразить: 1) R через r; 2) R через a_n.

Решение

Соединим точку O с вершинами A_1 и A_2 n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$. В получившемся $D\ A_1OA_2$ проведем высоту $OH_1 = r$.

Так как $OA_1 = OA_2 = R$, то $D\ A_1OA_2$ – равнобедренный, а высота OH_1 является медианой и биссектрисой, поэтому $A_1H_1 = \dfrac{a_n}{2}$, $\angle A_1OH_1 = \dfrac{\angle A_1OA_2}{2}$.

Так как $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – правильный n-угольник, то центральный угол $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360°}{n}$, а $\angle A_1OH_1 = \dfrac{360°}{n} : 2 = \dfrac{360°}{n} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{180°}{n}$.

Так как OH_1 – высота по построению, то $D\ A_1OH_1$ – прямоугольный.

В $D\ A_1OH_1$

$$cos\,\angle A_1OH_1 = \frac{OH_1}{OA_1};\ cos\,\frac{180°}{n} = \frac{r}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{r}{cos\,\frac{180°}{n}}};$$

$$sin\,\angle A_1OH_1 = \frac{A_1H_1}{OA_1} = \frac{\frac{a_n}{2}}{R};\ sin\,\frac{180°}{n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\frac{a_n}{2}}{sin\,\frac{180°}{n}} = \frac{a_n}{2\,sin\,\frac{180°}{n}},\ \text{т.е. } \boxed{R = \frac{a_n}{2\,sin\,\frac{180°}{n}}}.$$

Ответ: $R = \dfrac{r}{cos\,\frac{180°}{n}};\ R = \dfrac{a_n}{2\,sin\,\frac{180°}{n}}$.

Если n = 3, то $R_3 = \frac{r}{cos\frac{180°}{3}} = \frac{r}{cos\,60°} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r$.

Если n = 4, то $R_4 = \frac{r}{cos\frac{180°}{4}} = \frac{r}{cos\,45°} = \frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = r\sqrt{2}$.

Если n = 6, то $R_6 = \frac{r}{cos\frac{180°}{6}} = \frac{r}{cos\,30°} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Если n = 3, то $R_3 = \frac{a}{2\,sin\frac{180°}{3}} = \frac{a}{2\,sin\,60°} = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Если n = 4, то $R_4 = \frac{a}{2\,sin\frac{180°}{4}} = \frac{a}{2\,sin\,45°} = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Если n = 6, то $R_6 = \frac{a}{2\,sin\frac{180°}{6}} = \frac{a}{2\,sin\,30°} = \frac{a}{2\cdot\frac{1}{2}} = a$.

$$R = \frac{r}{cos\frac{180°}{n}} \Rightarrow \boxed{r = R\,cos\frac{180°}{n}}$$

$$R = \frac{a_n}{2\,sin\frac{180°}{n}} \Rightarrow \boxed{a_n = 2R\,sin\frac{180°}{n}}$$