Билет № 6

1. Теорема о сумме углов выпуклого n-угольника.
2. Формула длины окружности. Запись, вывод.

Вопрос № 1

Многоугольник. Теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника

Многоугольником называется фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек.

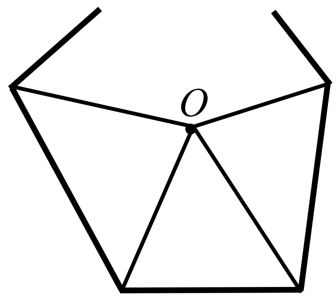
Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Внутренним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним при этой вершине.

Сумма внутренних углов выпуклого n –угольника

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)\cdot 180^{\circ}$, где n – число сторон многоугольника.



Дано: выпуклый n-угольник.

Доказать: $S_n = (n-2)\cdot 180^{\circ}$.

Доказательство

Внутри n-угольника возьмём произвольную точку O и соединим её со всеми вершинами. Многоугольник разобьётся на n треугольников с общей вершиной O.

Сумма углов каждого треугольника равна 180°, следовательно, сумма углов всех треугольников равна $180^{\circ}n$. В эту сумму, кроме суммы всех внутренних углов многоугольника, входит сумма углов треугольников при вершине O, равная 360°.

Таким образом, сумма всех внутренних углов многоугольника равна $180^{\circ}n - 360^{\circ} = (n-2)\cdot 180^{\circ}$.

Итак, $S_n = (n-2)\cdot 180^{\circ}$.

Ч.т.д.

Сумма внешних углов выпуклого n –угольника

Теорема. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, не зависит от n и равна 360°, где n – число сторон n-угольника.

Доказательство

Так как внешний угол многоугольника является смежным соответствующему внутреннему углу, а сумма смежных углов равна 180°, то сумма внешних углов многоугольника равна:

$$\underbrace{180^\circ\, n}_{\substack{\text{внешние}\\ \text{и внутренние}}} - \underbrace{(n-2)\cdot 180^\circ}_{\text{внутренние}} = 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot n + 360^\circ = 360^\circ.$$

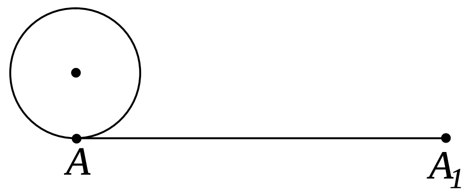
Итак, сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, не зависит от n и равна 360°, где n – число сторон n-угольника.

Ч.т.д.

Вопрос № 2
Формула длины окружности. Запись, вывод

Представим, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если ее разрезать в какой-нибудь точке A и распрямить ее, то получится отрезок AA_1, длина которого и будет длиной окружности (рис. 1).

Рис. 1



Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон все ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 2).

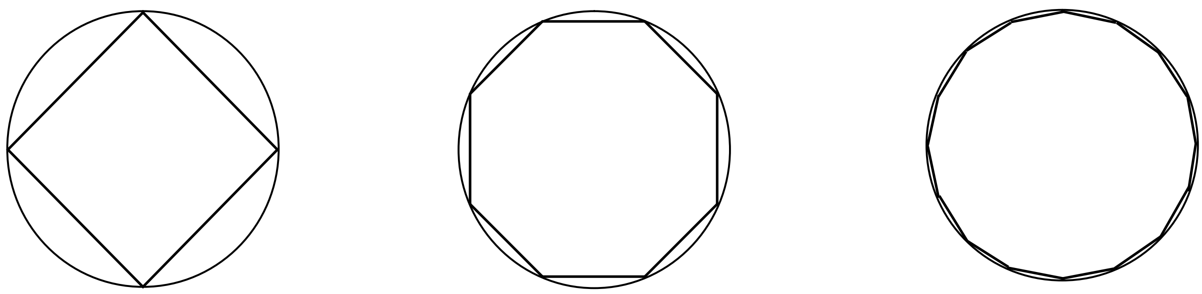


Рис. 2

Точное значение длины окружности – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Выведем формулу, выражающую длину окружности через ее радиус. Пусть C и C' – длины окружностей радиусов R и R_1. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и

a'_n их стороны. Используя формулу для нахождения стороны правильного многоугольника через радиус описанной окружности $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, получаем:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}}{n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R}{2R'}$, отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n.

Будем неограниченно увеличивать число n.

При $n \to \infty$ $P_n \to C$, $P'_n \to C'$, поэтому предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$.

С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. По свойству пропорции $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т.е. *отношение длины окружности к ее радиусу есть одно и то же число для всех окружностей.* Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Так как $D = 2R$, то получаем формулу для вычисления длины окружности диаметра D:

$$C = \pi D.$$

Замечание. Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т.е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближенным значением числа π с точностью до 0,002. Это приближенное значение было найдено еще в III в. до н.э. великим греческим ученым Архимедом. При решении задач обычно пользуются приближенным значением π с точностью до 0,01: $\pi \approx$ **3,14**.