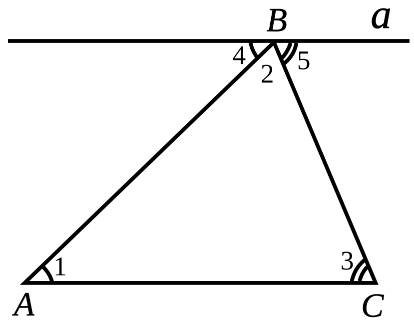
Билет № 5

1. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
2. Касательная к окружности. Определение, свойства.

Вопрос № 1
Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Следствия

Теорема. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.



Дано: D *ABC*.

Доказать: *Ð A* + *Ð B* + *Ð C* = 180°.

Доказательство

Через вершину *B* D *ABC* проведём прямую *a* || *AC*.

Ð 1 = Ð 4 как они являются накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых *a* и *AC* секущей *AB*.

Ð 3 = Ð 5, так как они являются накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых *a* и *AC* секущей *BC*.

Ð 4 + Ð 2 + Ð 5 = 180°, так как они образуют развёрнутый угол с вершиной в точке *B*.

Учитывая, что *Ð 4 = Ð 1*, а *Ð 5 = Ð 3*, получаем что *Ð 1 + Ð 2 + Ð 3* = 180° или *Ð A + Ð B + Ð C* = 180°.

Итак, сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Ч.т.д.

Следствия

1. В любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий угол тупой, либо два угла острые, а третий угол прямой.
2. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то и третьи углы треугольников равны.
3. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°.
5. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.
6. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним (теорема о внешнем угле треугольника).

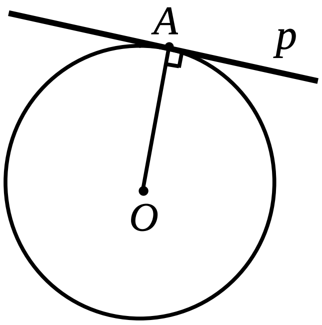
Вопрос № 2
Касательная к окружности. Определение, свойства

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется ***касательной к окружности***, а их общая точка называется ***точкой касания*** прямой и окружности. На рисунке 1 прямая *p* – касательная к окружности с центром *O, A* – точка касания.

Теорема о свойстве касательной к окружности

Теорема. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Рис. 1



Дано: ω *(O;OA)*

p – касательная к окружности,

A – точка касания.

Доказать: $p \perp OA$.

Доказательство (методом от противного)

Предположим, что $p \not\perp OA$ (рис. 1).

В этом случае радиус *OA* является наклонной к прямой *p*. Так как перпендикуляр, проведённый из точки *O* к прямой *p*, меньше наклонной *OA*, то расстояние от центра *O* окружности до прямой *p* меньше радиуса. Следовательно, прямая *p* и окружность имеют две общие точки, т.е. *p* – секущая. Но это противоречит условию теоремы, что *p* – касательная к окружности.

Так как получили противоречие, то предположение, что $p \not\perp OA$ было неверным, значит, $p \perp OA$.

Итак, касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Ч.т.д.

Верна и теорема, обратная теореме о свойстве касательной - ***признак касательной***.

Теорема. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Дано: *w (O;OA), p,* $A \in p$, $p \perp OA$ (рис. 1).

Доказать: *p* – касательная к *w (O;OA)*.

Доказательство

По условию $p \perp OA$, *OA* – радиус окружности, поэтому расстояние от центра окружности до прямой *p* равно радиусу *OA*. Следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. А это означает, что данная прямая *p* является касательной к окружности.

Итак, если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

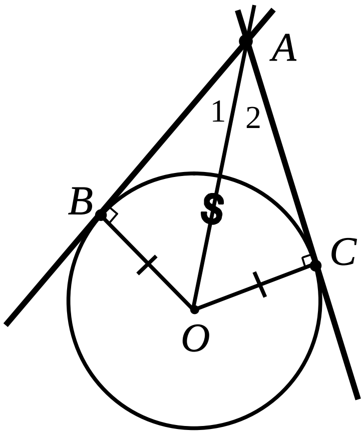
Ч.т.д.

На рисунке 2 проведены две касательные к окружности с центром *O*, проходящие через точку *A* и касающиеся окружности в точках *B* и *C*, при этом отрезки *AB* и *AC* называются ***отрезками касательных, проведенных из точки A.*** Они обладают свойством, сформулированным в следующей теореме.

Теорема об отрезках касательных к окружности, проведенных из одной точки

Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Рис. 2



Дано: ω *(O;r)*, *A*∉ ω *(O;r)*,
AB, *AC* – касательные к окружности,
B и *C* – точки касания.

Доказать: *AB = BC*, *Ð 1 =Ð 2.*

Доказательство

Так как касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, то *Ð ABO =Ð ACO* = 90°, а *D ABO* и *D ACO* – прямоугольные (рис. 2).

Рассмотрим *D ABO* и *D ACO*. *AO* – общая сторона, *OB = OC* как радиусы одной окружности. Следовательно, *D ABO = D ACO* по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому *AB = BC* и *Ð 1 =Ð 2.*

Итак, отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Ч.т.д.