Билет № 4

1. Признаки параллельности двух прямых.
2. Окружность. Определение, взаимное расположение прямой и окружности.

Вопрос № 1

Параллельные прямые. Признаки параллельности прямых

Две прямые называются ***параллельными,*** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Любая прямая считается параллельной самой себе. Для обозначения параллельности прямых используется символ ||, например, $a \parallel b$.

Сформулируем и докажем признаки параллельности двух прямых, связанные с углами, образованными при пересечении двух прямых секущей.

Признаки параллельности двух прямых

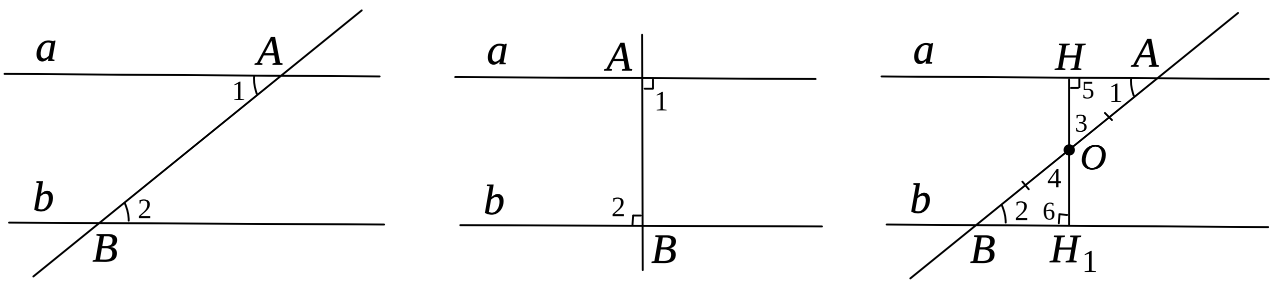
Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Рис. 1



а) ***б)*** ***в)***

***Дано*:** прямые a и b, AB – секущая,

Ð 1 и *Ð 2* – накрест лежащие углы,

Ð 1 = *Ð 2* (рис. 1, *а*).

***Доказать*:** $a \parallel b$.

Доказательство

Если *Ð 1* и *Ð 2* – прямые (рис. 1, *б*), то $a \perp AB$ и $b \perp AB$, следовательно, $a \parallel b$, так как две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Рассмотрим случай, когда *Ð 1* и *Ð 2* не прямые (рис. 1, *а*).

Выполним дополнительные построения. Из точки O – середины отрезка AB, проведём отрезок $OH \perp a$. На прямой b от точки B отложим отрезок $BH_1 = AH$, проведём отрезок OH_1 к прямой b.

Рассмотрим *D OHA* и *D* OH_1B. $AO = OB$, $AH = BH_1$ по построению; *Ð 1 = Ð 2* по условию теоремы. Следовательно, *D OHA = D* OH_1B по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому *Ð 3 = Ð 4* и *Ð 5 = Ð 6*. Так как *Ð 3 = Ð 4*, то точка H_1 лежит на продолжении луча *OH*, то есть точки *H*, *O* и H_1 лежат на одной прямой. Так как *Ð 5 = Ð 6*, то *Ð 6* – прямой, потому что *Ð 5* – прямой по построению.

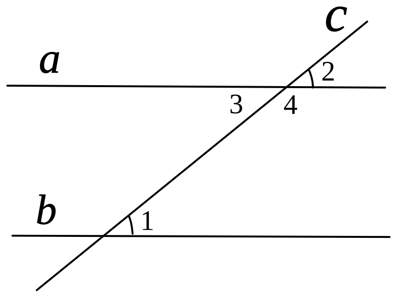
Получили, что $a \perp HH_1$ и $b \perp HH_1$, следовательно, $a \parallel b$, так как две прямые перпендикулярные третьей параллельны.

Итак, если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Ч.т.д.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Рис. 2



Дано: прямые *a* и *b*, *c* – секущая,
Ð 1 и *Ð 2* – соответственные углы,
Ð 1 = Ð 2 (рис. 2).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство

Ð 1 = Ð 2 по условию; *Ð 2 = Ð 3*, так как они вертикальные. По свойству транзитивности *Ð 1 = Ð 3*. Но *Ð 1* и *Ð 3* – накрест лежащие углы, поэтому по доказанному выше признаку $a \parallel b$.

Итак, если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Ч.т.д.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Дано: прямые *a* и *b*, *c* – секущая,
Ð 1 и *Ð 4* – односторонние углы, *Ð 1 + Ð 4* = 180° (рис. 2).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство

Ð 1 + Ð 4 = 180° по условию, отсюда

Ð1 = 180° – *Ð4*. (1)

Ð 3 + Ð 4 = 180°, т.к. *Ð 3* и *Ð 4* – смежные, отсюда

Ð 3 = 180° – *Ð 4*. (2)

Правые части равенств (1) и (2) равны, поэтому равны и левые части. Следовательно, $\angle 1$ = *Ð 3*. Но *Ð 1* и *Ð 3* – накрест лежащие, поэтому по доказанному выше признаку $a \parallel b$.

Ч.т.д.

Вопрос № 2

Окружность. Определение, взаимное расположение прямой и окружности

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном (одинаковом) расстоянии от данной точки.

Данная точка называется ***центром*** окружности, а отрезок, соединяющий центром с какой-либо точкой окружности, – ***радиусом*** окружности (рис. 1). Все радиусы имеют одну и туже длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром***. На рисунке 2 отрезки *AB, DE, EC, MN* – хорды окружности, отрезок *AB* – диаметр окружности.

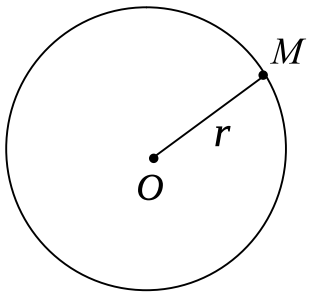


Рис. 1

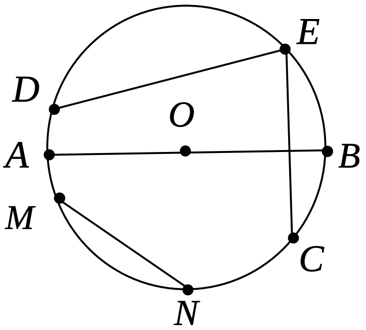


Рис. 2

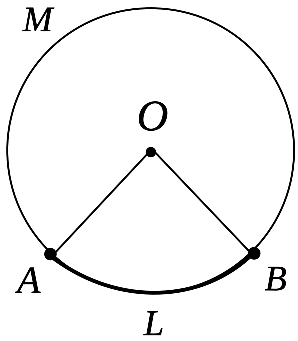


Рис. 3

Диаметр – самая большая хорда, любой диаметр – хорда, но не всякая хорда является диаметром.

Диаметр в два раза больше ее радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.

Если на окружности отметить две точки, то они разделят её на две части, каждая из которых называется дугой, то есть ***дуга*** – часть окружности, расположенная между двумя точками этой окружности.

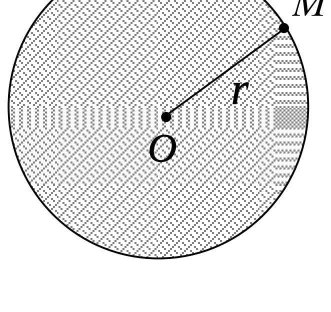
Чтобы различать эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку. Когда ясно, о какой из двух дуг идёт речь, используется обозначение без промежуточной точки. Обозначаются дуги так: $\cup ALB$, $\cup AMB$, $\cup AB$ (рис. 3).

Дуга называется ***полуокружностью***, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности. На рисунке 2 дуга *ANB* – полуокружность.

Для изображения окружности на чертеже пользуются ***циркулем.*** Чтобы провести окружность на местности, можно воспользоваться веревкой.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом (рис. 4).

Рис. 4



Возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности в зависимости от соотношения между ***d* - *расстоянием от центра окружности до прямой*** и ***r* - *радиусом окружности***: прямая и окружность имеют одну или две общие точки и не имеют ни одной общей точки.

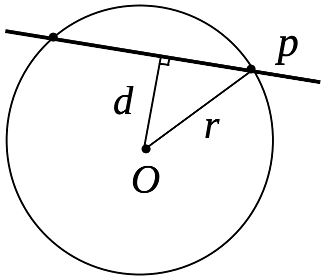
<u>1 случай</u>: ***d* < *r*** (рис. 5). Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки (*пересекаются в двух точках*).

В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности. ***Секущая*** – это прямая, имеющая с окружность две общие точки, или ***секущая*** – это прямая, пересекающая окружность в двух точках.

<u>2 случай</u>: ***d* = *r*** (рис. 6). Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну в одной точке общую точку (*касаются*).

В этом случае прямая называется касательной к окружности. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется ***касательной к окружности***, а их общая точка называется ***точкой касания*** прямой и окружности.

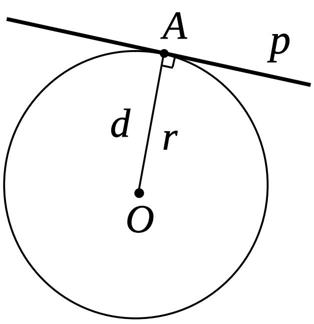
<u>3 случай</u>: ***d* > *r*** (рис. 7). Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек (*не пересекаются*).



d* < *r

p – секущая

Рис. 5

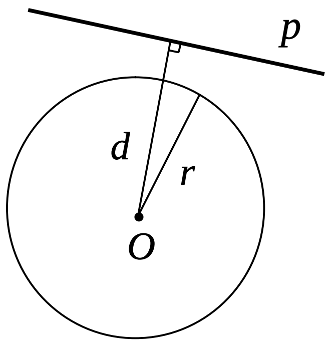


d* = *r

p – касательная

A – точка касания

Рис. 6



d* > *r

Рис. 7