

**Примерные экзаменационные билеты  
для проведения устной итоговой аттестации выпускников  
I X классов общеобразовательных учреждений  
ГЕОМЕТРИЯ**

По геометрии предлагается два блока экзаменационных билетов – для общеобразовательных школ и школ с углубленным изучением предмета.

**ШКОЛА С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ПРЕДМЕТА**

Экзаменационные билеты составлены на основе программы по геометрии для школ (классов) с углубленным изучением предмета и не «привязаны» ни к какому конкретному учебнику. Билеты рассчитаны на учащихся, имеющих не менее трех часов в неделю по геометрии в течение 8 и 9 классов.

Билет включает в себя три вопроса, относящихся к разным темам курса:

первый и второй вопросы носят теоретический характер, в третьем – экзаменуемому предлагаются две задачи.

Учитывая тот факт, что в школах (классах) с углубленным изучением геометрии на сегодняшний день существует различный уровень требований к учащимся и, следовательно, уровень их подготовленности также различен, преподавателю предоставляется возможность самому определять, какой ученик должен дать ответ с доказательством или выводом, а какой – без. Для получения высшей оценки необходимо доказать не менее двух теорем и решить одну задачу.

При составлении билетов учитель может воспользоваться своими задачами или задачами из «Сборника задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 классах» (авт. Д.М.Аверьянов, Б.П. Пигарев, А.Р. Рязановский. – М., Просвещение, 1996).

**Билет № 1**

1. Свойства равнобедренного треугольника, теорема о свойстве медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.

2. Зависимость между стороной правильного многоугольника и радиусом описанной и вписанной окружности. (Вывод формулы.) Установление этой зависимости для квадрата, правильного треугольника, шестиугольника.

3. Задача по теме «*Подобие треугольников*».

а) Одна из сторон треугольника равна 8, а два из его углов равны соответственно  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите все возможные значения периметра треугольника.

б) Один из углов треугольника  $150^\circ$ , а две из его сторон равны 2 и 7. Найдите все возможные значения площади треугольника.

### Билет № 2

1. Признаки равенства треугольника. (Доказательство всех признаков.)

2. Деление отрезка на  $n$  равных частей (с обоснованием).

3. Задача по теме «*Вписанная окружность*».

а) В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $B$  равны  $38^\circ$  и  $86^\circ$  соответственно. Найдите углы треугольника, вершинами которого являются точки касания сторон с вписанной в  $ABC$  окружностью.

б) В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Найдите длины каждого из шести отрезков, на которые разбивают стороны треугольника точки касания вневписанных окружностей.

### Билет № 3

1. Пропорциональные отрезки в круге.

2. Вывод формулы для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника.

3. Задача по теме «*Метод координат*».

а) Напишите уравнение всех прямых, отсекающих от окружностей  $x^2 + y^2 = 25$  хорду длины 6.

б) Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин равностороннего треугольника равна квадрату периметра этого треугольника.

### Билет №4

1. Параллельные прямые (определение). Признаки параллельности двух прямых и доказательство всех.

2. Нахождение гипотенузы, катета и острого угла прямоугольного треугольника по данным его второго катета и острому углу.

3. Задача по теме «*Углы в окружности*».

а) В окружность вписан одиннадцатиугольник, одна из сторон которого равна радиусу окружности, а остальные десять сторон равны между собой. Найдите углы одиннадцатиугольника.

б) На окружности с центром в точке  $O$  выбраны точки  $M$  и  $N$ . Вторая окружность вдвое меньшего радиуса касается первой в точке  $M$  и делит пополам отрезок  $ON$ . Найдите угол  $ONM$ .

### Билет № 5

1. Теорема об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей.

2. Вывод формулы площади треугольника:  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ .

3. Задача по теме «**Провальные многоугольники**».

а) Точка  $F$  лежит на стороне  $AB$  правильного восьмиугольника  $ABCDMN PQ$  так, что  $AF = 3\sqrt{2}$ ,  $FB = \sqrt{2}$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до прямых, содержащих стороны восьмиугольника.

б)  $ABCDEF$  – правильный шестиугольник площади  $S$ . Какая фигура образуется в пересечении треугольников  $ACE$  и  $BDF$ ? Найдите ее площадь.

### Билет № 6

1. Внешний угол треугольника (определение). Теорема о внешнем угле треугольника. Сумма внешних углов  $n$ -угольника.

2. Нахождение значений синуса, косинуса и тангенса угла в  $45^\circ$ .

3. Задача по теме «**Описанная окружность**».

а) В треугольнике  $ABC$   $AB = 2$ ,  $BC = 3$  и угол  $BAC$  в 3 раза больше угла  $BCA$ . Найдите радиус описанной окружности.

б) В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 45^\circ$ ,  $AB = 7$ ,  $AC = 4\sqrt{2}$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $ACA_1$  и  $BAA_1$ , где  $AA_1$  – высота треугольника  $ABC$ .

### Билет № 7

1. Геометрическое место точек. Теорема о геометрическом месте точек, равноудаленных от двух данных точек, в геометрической и аналитической формах.

2. Круг (определение). Формула для вычисления площади круга (без вывода). Вывод формулы площади кругового сектора.

3. Задача по теме «**Трапеция**».

а) Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции (их длины  $a$  и  $b$ ) и делящего трапецию на две равновеликие части.

б) Найдите площадь трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27.

### Билет № 8

1. Треугольник (определение). Теорема о сумме углов треугольника, прямая Эйлера (без доказательства).

2. Выражение расстояния между двумя точками через координаты этих точек (рассмотреть все случаи).

3. Задача по теме «**Комбинации окружностей**».

а) В круговой сектор с углом  $60^\circ$  помещен круг, касающийся дуги сектора и обоих радиусов. Найдите отношение площади сектора и площади круга.

б) Найдите площадь фигуры и длину границы фигуры, являющейся общей частью двух кругов радиуса  $R$  каждый, если расстояние между их центрами также равно  $R$ .

### Билет № 9

1. Признаки равенства прямоугольных треугольников (доказательства всех признаков).

2. Окружность (определение). Формула для вычисления длины окружности (без вывода). Вывод формулы длины дуги окружности.

3. Задача по теме «**Площади многоугольников**».

а) В треугольнике  $ABC$  точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  делят стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно в отношениях:  $BA_1:A_1C = 3:7$ ;  $AB_1:B_1C = 1:3$ ;  $AC_1:C_1B = 1$ . Найдите отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

б) В прямоугольнике  $ABCD$   $AD:AB = 5:3$ . На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  выбраны точки  $E$ ,  $F$ ,  $M$  и  $P$  соответственно так, что  $AP:PD = 2:3$ , а  $EFMP$  – ромб. Найдите отношение площадей прямоугольника и ромба.

### Билет № 10

1. Признаки параллелограмма с доказательством.

2. Построение треугольника по трем сторонам.

3. Задача по теме «**Окружность и многоугольник**».

а) Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении  $1:2$ , считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

б) В равнобедренную трапецию с острым углом  $\alpha$  вписана окружность. Какой процент площади трапеции занимает площадь четырехугольника с вершинами в точках касания?

### Билет № 11

1. Параллелограмм (определение). Свойства параллелограмма с доказательством (не менее четырех свойств),

2. Построение биссектрисы угла. Свойства биссектрисы угла треугольника.

3. Задача по теме «**Элементы треугольника**».

а) Две медианы треугольника равны 3 и 4. В каких пределах может изменяться третья медиана? При каких ее значениях треугольник будет прямоугольным?

б) Две высоты треугольника равны 2 и 3. В каких пределах может изменяться третья высота треугольника? При каких ее значениях треугольник будет прямоугольным?

### Билет № 12

1. Прямоугольник (определение). Свойства прямоугольника (не менее двух). Признаки прямоугольника.

2. Нахождение катета и острых углов прямоугольного треугольника по данным гипотенузе и другому катету.

3. Задача по теме «*Пропорциональные отрезки в круге*».

а) Найдите расстояние от центра окружности радиуса 9 см до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд длиной 16 см и 14 см соответственно.

б) Точка  $A$  лежит внутри круга с центром  $O$  и радиусом  $R$  так, что  $OA = a$  ( $a < R$ ). Докажите, что для любой хорды  $MN$ , проходящей через точку  $A$ , выполняется соотношение  $MA \times AN = R^2 - a^2$ .

### Билет №13

1. Ромб (определение). Свойства ромба. Признаки ромба.

2. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

3. Задача по теме «*Биссектриса внутреннего угла треугольника*».

а) Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки длиной 3 см и 5 см. В каких пределах может изменяться периметр треугольника?

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника делится на отрезки 5 см и 12 см точкой касания вписанной в треугольник окружности. На какие отрезки делит катет треугольника биссектриса его меньшего угла?

### Билет 14

1. Теорема Менелая (прямая и обратная). Доказать одну из них.

2. Вписанный четырехугольник.

3. Задача по теме «*Задача на построение*».

а) Постройте отрезок длины  $\sqrt{a^2 - b^2} + ab$ , где  $a > b$ , если  $a$  и  $b$  – длины двух данных отрезков.

б) Постройте треугольник по трем точкам касания его сторон с вписанной в треугольник окружностью.

### Билет № 15

1. Средняя линия треугольника и трапеции (определение). Теоремы о средней: линии треугольника и трапеции.

2. Построение окружности, вписанной в треугольник и описанной около него.

3. Задача по теме «**Дополнительные теоремы геометрии**».

а) На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно, причем отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $\frac{OC}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$ ;

б) Точка  $A_1$ , лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $A_1B:A_1C = 1:3$ . Вершина  $A$  – середина отрезка  $MC$ . В каком отношении (считая от  $B$ ) прямая  $A_1M$  делит сторону  $AB$ ?

### Билет № 16

1. Признаки подобия треугольников (доказательства).

2. Построение касательной к окружности (два случая).

3. Задача по теме «**Прямоугольник, квадрат**».

а)  $ABCD$  – квадрат со стороной  $a$ . Вершины  $C$ ,  $A$  и  $B$  являются серединами отрезков  $BM$ ,  $ND$  и  $DF$  соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $NFM$ .

б) Квадрат  $ABCD$  со стороной 8 см повернули вокруг его центра  $O$  так, что точка  $K$  лежащая на стороне  $AB$ , где  $AK = 1$ , перешла в точку на стороне  $BC$ . Найдите всевозможные расстояния между точкой  $D$  и ее образом при этом повороте.

### Билет № 17

1. Вывод формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ . Формула Герона (вывод).

2. Выражение координат середины отрезка через координаты его концов (рассмотреть все случаи).

3. Задача по теме «**Векторы**».

а) Найдите угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|2\vec{a} - 5\vec{b}| = 17$ ,  $(3\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 42$ .

б) Дано:  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ . Вычислите  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ .

### Билет № 18

1. Вывод формулы площади параллелограмма  $S = a \cdot h_a$ ;

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(d_1 \wedge d_2).$$

2. Вывод формулы радиуса описанной и вписанной окружностей (для треугольника).

3. Задача по теме «*Задачи на построение*».

а) Постройте отрезок  $\frac{a^2}{c}$ , где  $a$  и  $c$  – длины данных отрезков.

б) По данным четырем отрезкам  $a, b, c, d$  постройте трапецию с основаниями  $a$  и  $b$ . При каком соотношении между длинами этих отрезков это возможно?

### Билет № 19

1. Трапеция (определение). Вывод формулы площади трапеции. Теорема о четырех точках трапеции (доказательство).

2. Уравнение окружности (вывод). Взаимное расположение прямой и окружности в координатах.

3. Задача по теме «*Решение треугольников*».

а) Найдите острые углы треугольника  $ABC$ , если  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$ ,  $BK = 1$ , где  $CK$  – высота треугольника.

б) В треугольник  $ABC$  вписана окружность.  $C_1, B_1$  – точки ее касания со сторонами  $AB$  и  $AC$  соответственно;  $AC_1 = 7$ ,  $BC_1 = 6$ ,  $B_1C = 8$ . Найдите радиусы вписанной и описанной около треугольника  $ABC$  окружностей.

### Билет № 20

1. Теорема Пифагора (прямая и обратная).

2. Правильный многоугольник (определение). Построение правильного четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника.

3. Задача по теме «*Координаты на плоскости*».

а) Найдите площадь треугольника с вершинами  $A(1;4)$ ,  $B(-3; -1)$ ,  $C(2; -2)$ .

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до трех его вершин постоянна и равна удвоенному квадрату стороны этого треугольника.

### Билет № 21

1. Теорема синусов.
2. Построение прямой, параллельной дайной.
3. Задача по теме «*Подобие*».

а) Найдите площадь квадрата, вписанного в ромб со стороной 6 см и углом  $30^\circ$  (сторона квадрата параллельна диагонали ромба).

б) Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, (их длины  $a$  и  $b$ ) и делящего трапецию на два подобных четырехугольника.

### Билет № 22

1. Теорема косинусов.
2. Деление отрезка пополам (два способа).
3. Задача по теме «*Комбинации с окружностями*».

а) Найдите площадь фигуры, ограниченной дугами трех попарно касающихся окружностей радиусов 1, 1 и  $\sqrt{2} - 1$ .

б) Круги радиусов 1, 6 и 14 касаются друг друга. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в центрах данных кругов.

### Билет № 23

1. Окружность Аполлония.
2. Вертикальные углы (определение). Свойства вертикальных углов. Смежные углы.
3. Задача по теме «*Элементы треугольника*».

а) Докажите, что биссектриса  $AA_1$  треугольника  $ABC$  вычисляется по формуле

$$AA_1 = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \frac{A}{2}}{AB + AC}.$$

б) Докажите, что медиана треугольника со сторонами  $a, b, c$ , проведенная к стороне  $a$ , вычисляется из соотношения

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

### Билет № 24

1. Теорема Чебы (прямая и обратная). Доказать одну из них.
2. Описанный четырехугольник.
3. Задача по теме «*Прямоугольный треугольник*».

а) Окружность, касающаяся гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов, имеет радиус  $q$ . Найдите периметр треугольника.



б) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CD$  – высота, а один из катетов вдвое больше другого. В треугольниках  $ACD$  и  $B CD$  проведены биссектрисы  $DK$  и  $DP$  соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $KP = 4$ .